

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH**

NGUYỄN NHỰT PHI LONG

**PHÂN TÍCH TRẠNG THÁI TỚI HẠN VÀ ĐÁNH GIÁ
ĐỘ TIN CẬY CHO MỐI HÀN LASER**

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ

**NGÀNH: CƠ KỸ THUẬT
MÃ SỐ: 9520101**

Tp. Hồ Chí Minh, tháng 09/2020

**CÔNG TRÌNH ĐƯỢC HOÀN THÀNH TẠI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH**

Người hướng dẫn khoa học 1: PGS. TS. NGUYỄN HOÀI SON

(Ghi rõ họ, tên, chức danh khoa học, học vị và chữ ký)

Người hướng dẫn khoa học 2:

(Ghi rõ họ, tên, chức danh khoa học, học vị và chữ ký)

Luận án tiến sĩ được bảo vệ trước
HỘI ĐỒNG CHẤM BẢO VỆ LUẬN ÁN TIẾN SĨ
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT,
Ngày ... tháng ... năm

DANH MỤC CÔNG TRÌNH LIÊN QUAN LUẬN ÁN

1. **01 (một)** bài báo đăng trên **tạp chí quốc tế** trong danh mục **ESCI, Web of Science: JMCMS** ISSN (Print) 0973 – 8975, ISSN (Online) 2454 – 7190, General IF 2.6243) (**Công bố sau khi báo cáo cấp Cơ sở**)
2. **01 (một)** bài báo **tạp chí trong nước**: Vietnam **Journal** of Mechanics (**VJMech**) ISSN 0866 – 7136 (**Công bố sau khi báo cáo cấp Cơ sở**)
3. **02 (hai)** bài báo đăng trên **tạp chí quốc tế khác** có mã số ISSN không thuộc danh mục Web of Science/Scopus: **IJIRAE** ISSN 2349 – 2163; **IRJCS** ISSN 2393 – 9842
4. **02 (hai)** bài báo **Hội nghị quốc tế**: **ACOME2017; ICCM2018**: ISSN 2374 – 3948 (Online)
5. **01 (một)** bài báo **Hội nghị trong nước**: **CivilTech 3** ISBN 978 – 604 – 73 – 6847 – 1

[1] **Long Nguyen-Nhut-Phi**, Son Nguyen-Hoai*, Quan Nguyen, Phong Le-Thanh, Dai Mai-Duc, “*The reliable estimation for the laser weld by the h- and p- refinement of the Finite Element Method*”, **Journal** of Mechanics of Continua and Mathematical Sciences (JMCMS), ISSN (Print) 0973 – 8975, ISSN (Online) 2454 – 7190, General IF 2.6243, Vol. 15, 05/2020, 37-48 (DOI: <https://doi.org/10.26782/jmcms.2020.05.00003>)

<http://www.journalimcms.org/journal/the-reliable-estimation-for-the-laser-weld-by-the-h-and-p-refinement-of-the-finite-element-method/>

(Bài báo khoa học Chương 4)

[2] **Long Nguyen-Nhut-Phi**, Son Nguyen-Hoai*, Quan Nguyen, “*Determining of the laser heat conduction flux for three dimensional model by the sequential method*”, Vietnam **Journal** of Mechanics, ISSN 0866 – 7136, Vol. 42, No. 2 (2020), pp. 95 – 103 (DOI: <https://doi.org/10.15625/0866-7136/13753>)

<http://vjs.ac.vn/index.php/vjmech/article/view/13753>

(Bài báo khoa học Chương 2)

[3] **Long Nguyen-Nhut-Phi**, Son Nguyen-Hoai*, Quan Nguyen, “*Evaluate the strain energy error for the laser weld by the h-refinement of the Finite Element Method*”, **IJIRAE::International Journal** of Innovative Research in Advanced Engineering, ISSN 2349 – 2163, Vol. 6, 09/2019, 586-591 (DOI: 10.26562/IJIRAE.2019.SPAE10081)

<https://www.ijirae.com/volumes/Vol6/iss09/01.SPAE10081.pdf>

(Bài báo khoa học Chương 4)

[4] **Long Nguyen-Nhut-Phi**, Son Nguyen-Hoai*, “*Using the Genetic Algorithm to Optimize Laser Welding Parameters for Martensitic Stainless Steel*”, IRJCS:: International Research **Journal** of Computer Science, ISSN 2393 – 9842, Vol. 6, 09/2019, 676-680 (DOI: 10.26562/IRJCS.2019.SPCS10084)

<http://www.irjcs.com/volumes/Vol6/iss09/02.SPCS10084.pdf>

(Bài báo khoa học Chương 3)

[5] Quan, Nguyen; Son, Nguyen Hoai*; Tu, Chuong Thiet; **Long, Nguyen Nhut Phi**, “*A sequential method in estimating laser heat flux on three-dimensional conduction model*”, The 2nd **International Conference** on Advances in Computational Mechanics (ACOME2017), 08/2017, Phu Quoc, Viet Nam

<https://icacome.org/media/upload/editor/files/Abstract%20collection.pdf>,

STT: 48

(Bài báo khoa học Chương 2)

[6] **Long, Nguyen Nhut Phi**; Quan, Nguyen; Son, Nguyen Hoai*; Tin, Le Trung, “*A sequential method in inverse estimation of the absorption coefficient for the spot laser welding process*”, The 9th **International Conference** on Computational Methods (ICCM2018), ISSN 2374 – 3948 (Online), Vol. 5, 08/2018, 681-692, Rome, Italy

<http://www.sci-en-tech.com/ICCM2018/PDFs/3464-11548-1-PB.pdf>

(Bài báo khoa học Chương 2)

[7] **Nguyen Nhut Phi Long**, Nguyen Hoai Son*, Pham Tan, “*Compare the optimization of laser welding for martensitic stainless steels by meta-heuristic optimization algorithms*”, The 3rd **Conference** on Civil Technology (CivilTech 3), ISBN 978-604-73-6847-1, 09/2019, HCMUTE, Ho Chi Minh, Viet Nam

(Bài báo khoa học Chương 3)

LỜI CẢM ƠN

Trước tiên, nghiên cứu sinh kính gửi lời cảm ơn sâu sắc đến Thầy PGS.TS. Nguyễn Hoài Sơn, người giảng viên hướng dẫn nhiệt tình và tâm huyết, nhờ sự chỉ dẫn cụ thể và những góp ý của Thầy đã giúp nghiên cứu sinh hoàn thành luận án này.

Nghiên cứu sinh cũng chân thành gửi lời cảm ơn đến Ban chủ nhiệm, Quý Thầy, Cô của Khoa Xây dựng - Đại học Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM; Quý Thầy, Cô tham gia hướng dẫn các học phần trong chương trình đào tạo tiến sĩ; Hội đồng khoa học đánh giá chuyên đề Tổng quan, Chuyên đề khoa học 1, Chuyên đề khoa học 2, cấp Cơ sở; Nhà khoa học Phản biện cấp Cơ sở, cấp Trường; Đại diện Cơ quan - Đoàn thể, Nhà khoa học nhận xét bản tóm tắt; cộng sự đã đóng góp ý kiến, tạo điều kiện, động lực cho nghiên cứu sinh thực hiện công việc nghiên cứu.

Nghiên cứu sinh trân trọng cảm ơn Ban lãnh đạo Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM, Ban chủ nhiệm và Quý Thầy, Cô Khoa Cơ khí Chế tạo máy, Bộ môn Hàn và Công nghệ Kim loại vì đã có những chính sách hỗ trợ rất tốt cho nghiên cứu sinh học tập và làm việc.

Nghiên cứu sinh không quên cảm ơn gia đình luôn chia sẻ mọi khó khăn, là chỗ dựa vững chắc về vật chất lẫn tinh thần trong suốt thời gian thực hiện và hoàn thành luận án.

Kính chúc Ban lãnh đạo Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM, Ban chủ nhiệm Khoa Xây dựng, Ban chủ nhiệm Khoa Cơ khí Chế tạo máy, Bộ môn Hàn và Công nghệ Kim loại, Quý Thầy, Cô, Hội đồng khoa học, Nhà khoa học Phản biện, Đại diện Cơ quan - Đoàn thể, cộng sự, gia đình, đồng nghiệp, bạn bè mạnh khỏe, thành công trong cuộc sống.

Nghiên cứu sinh
Nguyễn Nhật Phi Long


TÓM TẮT LUẬN ÁN

Trong những năm gần đây, sự phát triển vượt bậc của công nghệ laser đã dần dần thay thế các công nghệ truyền thống nói chung, và hàn laser sử dụng trong các ngành công nghiệp khác nhau đã tăng lên nhanh chóng với các tính năng độc đáo. Chất lượng mối hàn được đặc trưng bởi hình học mối hàn, ảnh hưởng đến việc xác định tính chất cơ học của mối hàn. Điều đó được thể hiện thông qua mối quan hệ mật thiết giữa các thông số đầu vào: vật liệu, bề dày vật hàn, laser power (công suất laser), welding speed (tốc độ hàn), fiber diameter (đường kính sợi quang) và thông số đầu ra: hệ số hấp thu, thông số đặc trưng hình học mối hàn: weld zone width (bề rộng mối hàn), weld penetration depth (độ ngấu mối hàn). Trong quá trình tiến hành thí nghiệm hay trong thực tế sản xuất, việc tiết kiệm vật liệu, công sức, thời gian là hết sức cần thiết, đòi hỏi giải pháp đem lại hiệu quả, năng suất cao. Trên tinh thần đó, đề tài luận án đã thực hiện một số đóng góp như sau:

📌 **Phương pháp tuần tự (sequential method)** được sử dụng để xác định ngược giá trị hệ số hấp thu và kích thước mối hàn điểm bằng laser. Trong phương pháp này, tại mỗi bước thời gian, vòng lặp Modified Newton – Raphson kết hợp với khái niệm bước thời gian kế tiếp (concept of future time) được sử dụng để xác định ngược giá trị hệ số hấp thu. Điểm thuận lợi của phương pháp này là giá trị hệ số hấp thu chưa biết và quá trình xác định giá trị hệ số hấp thu được thực hiện từng bước thời gian cho đến thời điểm kết thúc khảo sát. Hai ứng dụng với giá trị hệ số hấp thu là hằng số và hệ số hấp thu là hàm số mũ theo thời gian gia nhiệt được thực hiện, cho thấy việc *xác định ngược hệ số này bằng phương pháp đề xuất đạt sai số nhỏ hơn 1.5%. Đồng thời, giá trị kích thước mối hàn: chiều rộng và chiều sâu mối hàn đạt sai số lần lượt là nhỏ hơn 0.3% và 0.5 % so với giá trị mong muốn.*

📌 **Thuật toán tiến hóa vi sai cải tiến (MDE – Modified Differential Evolution), thuật toán di truyền (GA – Genetic Algorithm) và thuật toán JAYA** được sử dụng để thực hiện *tối ưu hóa ngược thông số đầu vào của mối hàn laser cho thép không gỉ AISI 416 và AISI 440FSe*

nhằm đạt được kích thước mối hàn (kích thước mối hàn được cài đặt trước): Weld Zone Width ‘WZW_{ref}’ (μm) và Weld Penetration Depth ‘WPD_{ref}’ (μm). Kết quả tối ưu các tham số đầu vào: Laser Power ‘LP’ (W), Welding Speed ‘WS’ (m/min), và Fiber Diameter ‘FD’ (μm) của thuật toán GA với hệ số λ = 0.1 được so sánh với với kết quả thực nghiệm đo đạt bởi Khan [31] với sai số tương ứng là 1,89%, 4,80% và 2,92%. Bên cạnh đó, luận án cũng trình bày so sánh kết quả tối ưu giữa ba thuật toán ngẫu nhiên nêu trên: Thuật toán MDE có chất lượng và hiệu quả vượt trội so với các thuật toán JAYA và GA. Kết quả tối ưu của thuật toán MDE tiếp tục được so sánh với với kết quả thực nghiệm đo đạt bởi Khan [31] với sai số dưới 10%.

 Thuật toán tự động phát sinh lưới và tự động tăng bậc đa thức xấp xỉ được thực hiện giúp cho công việc tính toán linh hoạt và đa dạng. **Phương pháp phần tử hữu hạn với h- refinement và p-refinement** được sử dụng trong luận án này. Kết quả giá trị sai số chuẩn năng lượng biến dạng $\tilde{\eta}_{extra}$ cho bài toán lỗ vuông trong tấm vô hạn chịu kéo bằng phương pháp phần tử hữu hạn với h- p- refinement đạt giá trị lân cận 3%. Đồng thời, việc **đánh giá độ tin cậy** phương pháp phần tử hữu hạn với h- refinement và p-refinement cho mối hàn giáp mối thép AISI 1018 bằng laser đã đem lại kết quả rất khả quan. Số lượng lưới được khảo sát cho h- và p- refinement lần lượt là 11 (bậc đa thức p = 1) và 6 (bậc đa thức p = 3 ÷ 8). Kết quả giá trị sai số tương đối nằm trong phạm vi cho phép, dưới 10%. Ngoài ra, với kỹ thuật ngoại suy Richardson đã đạt được giá trị rất khả thi: sai số tương đối $\eta_{extra}^{max} (\%) = 3.756475407$ & $\eta_{extra}^{min} (\%) = 0.815296901$, chỉ số hiệu dụng $\bar{\theta}_{h-refinement} = 0.535667$ & $\bar{\theta}_{p-refinement} = 0.506616$ và chỉ số điều kiện $SD_{h-refinement} = 0.019528$ & $SD_{p-refinement} = 0.103834$, thỏa mãn: $1 \leq \eta (\%) \leq 10$, $\theta \leq 1.2$, $SD \leq 0.2$ [94].

SUMMARY

The rapid development of laser technology in recent years has gradually replaced traditional technologies in general, and laser welding used in various industries has increased rapidly with unique features. The weld quality is characterized by weld geometry, which affects the determination of the mechanical properties of the weld. This is shown through the close relationship between the input parameters: material, welding thickness, laser power (laser power), welding speed (welding speed), fiber diameter (fiber diameter).) and output parameters: absorption coefficient, weld geometry characteristics: weld zone width, weld penetration depth (weld penetration). In the process of conducting experiments or in production practice, saving materials, effort and time are essential, requiring solutions to bring about efficiency and high productivity.

In this thesis, the Ph.D. student performed inverse determination of the absorption coefficient and weld size in spot laser welding by the sequential method: at each time step is solved by the modified Newton-Raphson method combined with the concept of future time used to establish the absorption coefficient value. The advantages of this method are that the functional form for the unknown absorption coefficient is not necessary to preselect and nonlinear least-square do not need in the algorithm. Two examples have been fulfilled to demonstrate the proposed method. The obtained results can be concluded that the proposed method is an accurate and stable method to inversely determine the absorption coefficient in the spot laser welding, and weld size (weld width and depth) are also very close to the desired value.

Secondly, the inverse optimization of input parameters (Laser Power 'LP' (W), Welding Speed 'WS' (m / min), and Fiber Diameter 'FD' (μm)) of laser weld for the AISI 416 and AISI 440FSe stainless steel to control the reached weld size (weld size is pre-set): Weld Zone Width 'WZW_{ref}' (μm) and Weld Penetration Depth 'WPD_{ref}' (μm) by the three meta-heuristic

optimization algorithms: the Modified Differential Evolution (MDE) algorithm, the Genetic Algorithm (GA) and the JAYA algorithm. The result of the GA algorithm with $\lambda = 0.1$ is compared with Khan's affirmation experiment result [25]: the error of the input parameters LP, WS, and FD, respectively, were 1.89 %, 4.80 %, and 2.92 %. Besides, the thesis also presents the effect of three different meta-heuristic algorithms: GA, JAYA and MDE. The MDE algorithm showed better efficiency and the result of this algorithm is compared with Khan's affirmation experiment result [25] with errors below 10%.

The representation of a continuous field of the problem domain with several piecewise fields results in discretization error in the finite element solution. This error can be reduced by two approaches: by decreasing the sizes of the elements: h- version, or by using higher-order approximation fields: p- version with the objective of obtaining solutions with prespecified accuracy and minimum cost of model preparation and computation. The value of the relative error of the strain energy $\tilde{\eta}_{extra}$ for an unstressed square hole in an infinite plate subjected to unidirectional tension by the h-p- refinement of the FEM reaches a neighboring value of 3%. At the same time, according to the Ph. D. student's knowledge, there have not been many studies evaluating the reliability of this method for welding in general and laser welding in particular. Another novelty of the thesis is that performing the reliability evaluation of the finite element method with h-refinement and p-refinement for AISI 1080 steel butt welded joints by the laser has brought very satisfactory results. Specifically, with h- refinement, the effective index θ is in the range (0.653 - 0.446), $\bar{\theta} = 0.535$ and the index $SD = 0.019$; and with p-refinement, θ is in the range (0.977 - 0.236), $\bar{\theta} = 0.506$ and $SD = 0.103$. The value of the result satisfies the requirement in [88]: $1 \leq \eta (\%) \leq 10, \leq 1.2, SD \leq 0.2$.

MỞ ĐẦU

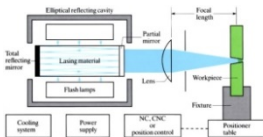
1. Giới thiệu

Trong những năm gần đây, sự phát triển vượt bậc của công nghệ laser đã dần dần thay thế các công nghệ truyền thống, được ưu tiên và sử dụng rộng rãi trong những ngành công nghiệp hiện đại: công nghiệp ô tô và hàng không, công nghiệp điện tử và công nghiệp sản xuất thiết bị y tế. Trong đó, việc sử dụng hàn laser với các tính năng độc đáo: nguồn nhiệt đầu vào thấp và chính xác, vùng ảnh hưởng nhiệt nhỏ, chiều rộng mối hàn hẹp, độ ngấu mối hàn sâu, ứng suất thấp, biến dạng nhỏ, tốc độ hàn cao.

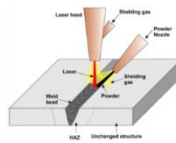
2. Lý do chọn đề tài

Trong lĩnh vực nghiên cứu cũng như trong thực tế sản xuất của quá trình hàn, vấn đề hết sức quan tâm là việc lựa chọn, kiểm soát thông số đầu vào (vật liệu, bề dày vật hàn, công suất, hệ số hấp thụ, tốc độ hàn, ..) và đánh giá sự ảnh hưởng của các thông số đó đến hình học mối hàn (bề rộng vùng hàn, độ ngấu mối hàn), đặc trưng cho chất lượng mối hàn, liên quan tính chất cơ học của mối hàn:

Thông số đầu vào: Vật liệu, bề dày vật hàn, công suất laser, hệ số hấp thụ, tốc độ hàn, đường kính sợi quang,

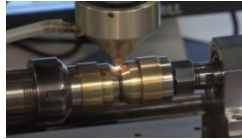


Nguyên lý hàn laser

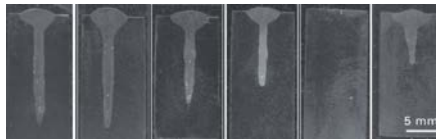


Quá trình thực hiện mối hàn laser

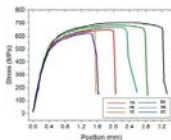
Một số sản phẩm ứng dụng hàn laser



Thông số đầu ra: bề rộng vùng hàn, độ ngấu mối hàn, ..



Macro mặt cắt ngang mối hàn laser



Biểu đồ thử kéo mối hàn laser

3. Mục đích đề tài

- Chọn giải pháp đánh giá chính xác thông số đầu vào nhằm đảm bảo mỗi hàn đạt yêu cầu về cơ tính, đáp ứng điều kiện làm việc. Nếu không: mỗi hàn không ngẫu, bị thủng,
- Chọn giải pháp đánh giá độ tin cậy phương pháp số cho mỗi hàn cụ thể

4. Đối tượng nghiên cứu

- Mỗi hàn laser cho thép AISI 304, AISI 416 và AISI 440FSe, AISI 1018
- Phương pháp tuần tự, thuật toán tối ưu hóa ngẫu nhiên, phương pháp phân tử hữu hạn với h- refinement và p- refinement

5. Phạm vi nghiên cứu

- ✚ Phương pháp tuần tự được sử dụng trong việc xác định ngược giá trị hệ số hấp thụ của mỗi hàn điểm laser cho thép không gỉ AISI 304
- ✚ Ba thuật toán GA, Jaya & MDE áp dụng cho việc tối ưu hóa thông số đầu vào (công suất laser, tốc độ hàn, đường kính sợi quang) của mỗi hàn laser cho thép không gỉ AISI 416 và AISI 440FSe để đạt được bề rộng & độ ngẫu của mỗi hàn (bề rộng & độ ngẫu của mỗi hàn được cài đặt trước)
- ✚ Đánh giá độ tin cậy phương pháp phân tử hữu hạn với h- refinement và p-refinement cho mỗi hàn giáp mỗi thép AISI 1018 bằng laser

6. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn

Nhằm tận dụng tính độc đáo, ưu thế của công nghệ hàn laser, và là cơ sở phát triển kỹ thuật hàn laser hơn nữa trong công nghiệp, vấn đề đánh giá chất lượng mỗi hàn được xem xét dưới góc độ thông qua việc phân tích mỗi hàn ở trạng thái tối hạn và đánh giá độ tin cậy.

Đề tài luận án đã sử dụng phương pháp tuần tự để xác định ngược giá trị hấp thụ & tiên đoán kích thước mỗi hàn điểm laser; thuật toán tối ưu GA, Jaya & MDE thực hiện lựa chọn thông số đầu vào như công suất laser, tốc độ hàn, đường kính sợi quang được tối ưu nhằm đạt được kích thước mỗi hàn theo mong muốn; và phương pháp phân tử hữu hạn với h- refinement, p- refinement trong việc giải quyết bài toán đánh giá độ tin cậy cho mỗi hàn giáp thép bằng laser.

Kết quả đề tài luận án là cơ sở để phát triển các bài toán phức tạp hơn, thậm chí cả bài toán 3D, cũng như áp dụng có các vật liệu khác nhau. Đồng thời, luận án cũng góp phần rút ngắn khoảng cách giữa mô phỏng và thực nghiệm; nhằm tiết kiệm vật liệu, công sức, thời gian; đem lại hiệu quả, năng suất cao trong tiến hành thí nghiệm và thực tế sản xuất.

Chương 1

TỔNG QUAN

1.1. Tổng quan về tình hình nghiên cứu

1.1.1. Tổng quan về tình hình nghiên cứu đánh giá mật độ dòng nhiệt laser của mối hàn điểm bằng phương pháp tuần tự

Đầu tiên, dựa trên lý thuyết cơ bản về dòng nhiệt (heat flow) của nguồn nhiệt di chuyển, Rosenthal đã đưa ra mô hình lý thuyết với nguồn nhiệt dạng đường và điểm để tiên đoán sự phân bố nhiệt và chu kỳ nhiệt của một vật được tia laser gia nhiệt nhưng tồn tại sai số rất lớn đối với thông số nhiệt độ tại những vị trí gần tia laser gia nhiệt, sát và bên trong vùng hàn. Pavelic và cộng sự; Friedman đã đưa ra mô hình đĩa với sự phân bố nhiệt theo phân bố Gauss trên bề mặt của chi tiết (được gia nhiệt bởi tia laser) kết hợp với phương pháp phân tử hữu hạn. Goldak et al. đã đề xuất mô hình nguồn nhiệt thể tích gồm 2 phần elip có độ chính xác cao và được sử dụng rộng rãi. Yadaiah và Bag đã đề xuất một mô hình nguồn nhiệt hình quả trứng, có thể xem là một dạng tổng quát của tất cả nguồn nhiệt trước đó. Dinesh Babu và cộng sự đã nghiên cứu những thông số đầu vào gồm công suất tia laser và tốc độ di chuyển đến chiều rộng và chiều sâu thâm của quá trình tôi cứng thép carbon hợp kim thấp có độ bền cao. El-Batahgy và Abdel-Monem đã nghiên cứu những ảnh hưởng của thông số đầu vào của hàn laser đến hình dạng của vùng nóng chảy. Benyounis và cộng sự đã sử dụng phương pháp đáp ứng bề mặt để nghiên cứu ảnh hưởng của công suất hàn, tốc độ hàn và vị trí hội tụ của tia laser đến nguồn nhiệt, chiều sâu thâm, chiều rộng vùng hàn và chiều rộng vùng ảnh hưởng nhiệt, kết quả là nguồn nhiệt giữ vai trò quan trọng trong sự hình thành kích thước mối hàn. Từ những nghiên cứu trên cho thấy rằng công suất tia laser và nguồn nhiệt (được đặc trưng bởi hệ số hấp thụ) là hai thông số rất quan trọng trong hàn và xử lý vật liệu bằng laser. Trong thực tế, công suất tia laser có thể điều chỉnh một cách trực tiếp từ máy hàn laser. Trong khi đó, giá trị hệ số hấp thụ rất khó xác định trực tiếp. Một giải pháp để xác định hệ số này là sử dụng phương pháp ngược (inverse method) hay phương pháp "mò" (ill-posed method): sử dụng dữ liệu về sự thay đổi nhiệt độ tại một hay vài điểm nào đó trong vật hàn để tính ngược lại hệ số này. Sun và cộng sự xác định giá trị hệ số hấp thụ của quá trình tôi cứng bề mặt bằng tia laser bởi sử dụng mô hình truyền nhiệt ổn định hai chiều. Wang và cộng sự sử dụng phương pháp Gradient liên hợp để tiên đoán giá trị hệ số hấp thụ của quá trình tôi cứng bề mặt bằng laser. Chen và Wu đã đề xuất kỹ thuật lai để xác định nhiệt độ bề mặt, xung nhiệt và giá trị hệ số hấp thụ trong quá trình tôi cứng bề mặt bằng laser. Đối với quá trình hàn, vật liệu chuyển từ trạng thái rắn sang trạng thái lỏng; đặc tính nhiệt của vật liệu ở những trạng thái này rất khác nhau, có sự thay đổi rất đột ngột, không thể xấp xỉ hằng số cho những đặc tính này. Có thể nói, những vấn đề liên quan đến quá trình hàn là những bài toán có tính phi tuyến rất cao. Nguyen và Yang đã đề xuất một phương pháp tuần tự (sequential method) để xác định giá trị hệ số hấp thụ trong mô hình nhiệt một chiều.

1.1.2. Tổng quan về tình hình nghiên cứu tối ưu hóa thông số quá trình của mối hàn laser bằng thuật toán ngẫu nhiên

Nhìn chung, chất lượng mối hàn được đặc trưng bởi hình học mối hàn, ảnh hưởng đến việc xác định tính chất cơ học của mối hàn. Vì vậy, việc chọn và kiểm soát các thông số quá trình hàn: công suất tia laser, tốc độ hàn, đường kính tia laser, vị trí hàn, khí bảo vệ là hết sức cần thiết và đòi hỏi chính xác. Benyounis và cộng sự đã nghiên cứu mối hàn giáp mối bằng laser cho thép không gỉ AISI 304. Để đạt mối hàn tốt, cơ tính của vật liệu được kiểm soát một cách hiệu quả. Độ bền kéo, độ dai va đập và chi phí vận hành của mối hàn laser được xem là yếu tố đầu ra. Trong nghiên cứu này, các thông số đầu vào bao gồm: công suất laser, vị trí tiêu điểm và tốc độ hàn. Phương pháp đáp ứng bề mặt và xác suất thống kê được sử dụng hiệu quả để tìm thông số tối ưu chịu ảnh hưởng của các biến đầu vào. Anawa và cộng sự đã tiến hành nghiên cứu mối ghép cho 2 vật liệu phổ biến ferritic/austenitic (F/A) được sử dụng trong nhiều ứng dụng. Xấp xỉ Taguchi được sử dụng tạo ra ma trận L25 của các thông số quá trình: tiêu điểm, công suất laser và tốc độ hàn, với hệ số đáp ứng là độ bền kéo và tỉ lệ tín hiệu nhiễu của mối hàn laser cho thép carbon thấp và thép không gỉ AISI 316. Khan và cộng sự đã thực hiện tối ưu hóa thông số quá trình mối hàn laser cho thép không gỉ AISI 416 và AISI 440 FSe, dày 0.55 mm. Thiết kế thử nghiệm đầy đủ nhân tố/yếu tố được xác định bằng phần mềm thiết kế thử nghiệm (Design Expert software) phiên bản 7.0 bao gồm 18 thực nghiệm với 3 mức công suất laser và tốc độ hàn, 2 mức đường kính sợi quang. Thông số đáp ứng được xét đến: bề rộng mối hàn, độ ngẫu mối hàn và lực cắt. ANOVA được sử dụng để tìm thông số quá trình. Yangyang Zhao và cộng sự đã tiến hành đánh giá ảnh hưởng của thông số đầu vào mối hàn chòng mối bằng laser cho thép SAE1004, dày 0.4 mm: tốc độ hàn, khe hở, tiêu điểm, và công suất laser đến hình học mối hàn. Mô hình toán cho các thông số đáp ứng (bề rộng mối hàn, độ ngẫu mối hàn và lõm bề mặt) đã được xây dựng bằng phương pháp đáp ứng bề mặt (RSM). Công suất laser và tốc độ hàn ảnh hưởng rõ rệt đến tất cả thông số đầu ra. Reisinger và cộng sự [33] đã đề cập chất lượng mối hàn laser CO₂ cho thép song pha (Dual phase - DP) và thép dư ứng lực (Transformation induced plasticity - TRIP). Mô hình toán thể hiện mối liên quan giữa thông số quá trình: tiêu điểm, công suất laser và tốc độ hàn và thông số đáp ứng: nguồn nhiệt đầu vào, độ ngẫu mối hàn, bề rộng mối hàn, độ bền kéo và chiều cao mối hàn đã được phát triển bằng phương pháp đáp ứng bề mặt (RSM) trên nền tảng thiết kế Box-Behnken. Trong nghiên cứu của Mingjun Zhang và cộng sự, mối hàn laser cho thép không gỉ AISI 304, dày 12 mm với độ ngẫu sâu được đánh giá thông qua bộ thông số quá trình: focus lens, focus size, tốc độ hàn, công suất laser, 3 khí bảo vệ khác nhau (Ar, N₂, và He) và thông số đầu ra: độ ngẫu mối hàn, bề rộng mối hàn. Sau khi thực hiện theo tiêu chuẩn công nghiệp, mẫu hàn được cắt bằng EDM, kiểm tra kim tương trên kính hiển vi quang học, kiểm tra độ bền kéo trên máy thử kéo và kiểm tra các mặt gãy bằng kính hiển vi điện tử quét (SEM). Bài báo của Yuewei Ai và cộng sự [35] đã trình bày các phương pháp để tối ưu hóa thông số quá trình nhằm đạt kích thước mối hàn theo yêu cầu

và ít khuyết tật. Tương ứng cho mỗi biến đầu vào (công suất laser, tốc độ hàn, tiêu điểm và chiều dài laser), phương pháp Taguchi được sử dụng tạo ra thiết kế thử nghiệm (DOE) với 5 mức tác động. Mô hình toán phi tuyến được giải quyết bằng thuật toán tối ưu hóa bầy đàn (Particle Swarm Optimization - PSO), mạng thần kinh lan truyền ngược kết hợp tối ưu hóa bầy đàn (Back PSO-Propagation Neural Network – PSO-BPNN) và thuật toán di truyền (Genetic Algorithm – GA). Trong nghiên cứu của Ahn và cộng sự [36], mỗi hàn laser cho hợp kim Ti-6Al-4V với độ ngẫu sâu được nghiên cứu thông qua bộ thông số đầu vào: công suất laser, tốc độ hàn, tiêu điểm và thông số đầu ra: cấu trúc vi mô, khuyết tật, vùng ảnh hưởng nhiệt và vùng hàn. Trong nghiên cứu này, phương pháp truyền thống được sử dụng với hai biến số quá trình được xem là hằng số. Mục tiêu của nghiên cứu của Zhongmei Gao và cộng sự là tối ưu hóa hình học mỗi hàn laser hồ quang cho thép không gỉ AISI 316L. Phương pháp Taguchi ma trận trực giao L25 (25 bộ) được sử dụng thiết kế 5 mức 4 tác động để khảo sát thông số quá trình. Mô hình Kriging được lựa chọn thiết lập mối quan hệ giữa thông số quá trình (cường độ hàn, công suất laser, tốc độ hàn và khoảng cách hồ quang-laser) và thông số đáp ứng (bề rộng mối hàn, độ ngẫu mỗi hàn và vùng ảnh hưởng nhiệt). Tác giả thực hiện tối ưu hóa di truyền (Genetic Algorithm – GA). Shanmugarajan và cộng sự nghiên cứu việc tối ưu hóa cho mỗi hàn laser cho thép P92 (CSEF). Mô hình Taguchi dựa trên phân tích quan hệ Xám (Grey relational analysis – GRA) được sử dụng để thiết lập mô hình toán với thông số đầu vào: công suất laser, tốc độ hàn, tiêu điểm và thông số đầu ra: bề rộng mối hàn, độ ngẫu mỗi hàn và vùng ảnh hưởng nhiệt. Trong bài báo của Rao và cộng sự, thuật toán Jaya đa mục tiêu (Multi-Objective Jaya – MO-Jaya) đã giải quyết bài toán tối ưu hóa trong trường hợp mô phỏng một cách đơn giản cho 4 quá trình gia công phi cổ điển: gia công bằng tia lửa điện (EDM), cắt bằng laser, gia công điện-hóa, phay micro bằng chùm tia ion. Kết quả của thuật toán so sánh với các thuật toán khác: GA, NSGA, NSGA-II, BBO, NSTLBO, PSO, SQP; và mô phỏng Monte Carlo. Nghiên cứu của Vijayanin và cộng sự [40] đã trình bày kết quả trong việc tối ưu hóa thông số mỗi hàn laser khuếch tán nguội CO₂ cho thép carbon thấp. Phương pháp đáp ứng bề mặt (RSM) và thuật toán Genetic Algorithm (GA) được sử dụng để so sánh. Mô hình toán thể hiện hai thông số đầu ra (hình học mối hàn và vùng ảnh hưởng nhiệt) được thiết lập theo ba thông số đầu vào (công suất laser, tốc độ hàn và tiêu điểm). Yang và cộng sự [41] đã thực hiện tích hợp giữa mô hình Kriging với thuật toán di truyền với cơ chế tìm kiếm cá thể không trội (Non-dominated Sorting Genetic Algorithm-II – NSGA-II) cho việc tối ưu hóa thông số quá trình mỗi hàn hỗn hợp giữa laser và từ tính, nhằm làm giảm khuyết tật, tăng độ ngẫu và chất lượng mối hàn. Trước khi thiết lập mối quan hệ giữa thông số đầu vào (mật độ từ thông, công suất laser và tốc độ hàn) và biên dạng mối hàn của quá trình hàn bằng Kriging meta-model, một thí nghiệm năm mức ba yếu tố sử dụng Taguchi ma trận trực giao L25 được triển khai. Sau khi tối ưu hóa các thông số quy trình đã mục tiêu bằng NSGA-II và đường cong Pareto, thông số đầu ra được xác nhận thông qua kiểm tra macro, micro và độ cứng vi mô. Kết quả cho thấy sự tích hợp đã đem lại hiệu quả cao.

1.1.3. Tổng quan về tình hình nghiên cứu phương pháp phần tử hữu hạn với h-refinement, p-refinement cho bài toán hai chiều

Ngày nay, phương pháp phân tích phần tử hữu hạn được sử dụng ngày càng nhiều và việc phát triển một quy trình đáng tin cậy và nhanh chóng cho các kỹ sư là cần thiết. Với h-refinement thì đề cập đến việc giảm độ dài đặc trưng (h) của các phần tử, cải thiện kết quả với lưới mịn hơn cho cùng loại phần tử; còn p-refinement cho thấy việc tăng mức độ đa thức hoàn chỉnh cao nhất (p) trong một phần tử mà không thay đổi số lượng phần tử được sử dụng. Tuy nhiên, bậc đa thức p của các hàm dạng được làm giàu bằng cách thêm các số hạng bậc cao hơn mà không làm thay đổi hàm dạng bậc thấp hơn hiện có. Bậc thực tế của hàm chạy từ $p = 2$ đến $p = 8$. Các hàm hình dạng này được tạo từ đa thức Legendre và được gọi là hàm dạng *Hierarchical*. Việc kết nối h-refinement và p-refinement được gọi là h-p-refinement cho kết quả tốc độ hội tụ theo cấp số nhân. Việc hoàn tất tính toán của giải pháp này gọi là phương pháp phần tử hữu hạn với h-refinement, p-refinement, và h-p-refinement. Một vài đánh giá sai số đã được phát triển sử dụng trong kỹ thuật. Tuy nhiên, các cách đánh giá này chuyên sâu về tính toán và vẫn cần được xác thực cho các phân tích kỹ thuật thực tế. Thêm vào đó, các đánh giá sai số được cập dưới dạng *chuan năng lượng*. Đại lượng này khác hẳn các đại lượng được quan tâm trong phân tích cơ học vật rắn, thường là ứng suất hoặc chuyển vị tại các điểm cụ thể trong miền khảo sát. Ngoài ra sự hội tụ năng lượng không bao gồm sự hội tụ ứng suất. Sự phát triển cho đánh giá sai số chính xác trường ứng suất sẽ dẫn đến một cách hiệu quả hơn cho việc kiểm soát quá trình sàng lọc và sẽ cung cấp thông tin có giá trị để kiểm tra sự hội tụ của ứng suất. Nghiên cứu của L. Demkowicz và cộng sự đã đưa ra đánh giá sai số cục bộ cho hai mô hình 2D (bài toán Poisson trong mặt phẳng và bài toán đàn hồi mặt phẳng) bằng cách sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn với h-refinement dựa trên ước tính nội suy và ‘công thức trích xuất’ (‘extraction formulas’) của Babuska và Miller. Kết quả của Babuska và cộng sự cho thấy phân tích các mô hình toán học một cách chi tiết, nêu bật những điểm tương đồng và khác biệt giữa các vấn đề một chiều và hai chiều thông qua việc nhấn mạnh các khía cạnh của phương pháp phần tử hữu hạn với h-refinement và phương pháp phần tử hữu hạn với h-p-refinement. Khả năng đánh giá độ tin cậy của bất kỳ dữ liệu kỹ thuật nào là một trong những tiêu chí so sánh cơ bản. Trong nghiên cứu của Rachowicz, kết quả của lưới phiên bản h-dị hướng được so sánh với lưới phiên bản h-đẳng hướng. Các giải pháp của phương pháp dị hướng là gần đúng với ứng xử một chiều trong một số lĩnh vực, điển hình là hiện tượng toán lớp biên. Bằng cách sử dụng đánh giá nội suy sai số cho các phần tử tứ giác mà không có giả thuyết về độ chính xác của tỷ lệ của hai kích thước được đo theo hai hướng để đánh giá hiệu quả của phương pháp này. Đối với các vấn đề phức tạp hơn, cải tiến này được coi là sự kích thích cho một vài kế hoạch thực nghiệm. Tuy nhiên, việc thực hiện phép nội suy này cho các yếu tố đường cong và các vấn đề khác nhau cần nghiên cứu thêm. Nghiên cứu của Michael R. Dörfel và cộng sự đã trình bày việc sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn với h-refinement cục bộ với T-splines bằng cách đề xuất một thuật

toán tương thích tạo ra các lưới tinh chế cục bộ thông qua kết hợp với một tập hợp đánh giá sai số quy nạp (posterior) để khắc phục nhược điểm của phân tích đẳng hình học dựa trên NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines). Điều này đã dẫn đến sự gia tăng đáng kể chất lượng của hiệu quả. Tuy nhiên, trong vấn đề ba chiều, điều đáng lo ngại là sự hiệu quả của các khớp nối T (T-junctions) không cục bộ như mong đợi.

**** Tóm lại:**

Điểm nổi bật của phương pháp tuần tự trong [28] là hệ số hấp thụ chưa biết và quá trình xác định giá trị hệ số hấp thụ được thực hiện từng bước thời gian cho đến thời điểm kết thúc khảo sát. Việc sử dụng một phương pháp ngược hiệu quả như phương pháp tuần tự trong việc xác định giá trị hệ số hấp thụ và kích thước mối hàn trong hàn điểm bằng laser chưa được thực hiện rộng rãi.

Các nghiên cứu phân tích trong mục 1.1.2 cho thấy rằng nhằm nâng cao chất lượng mối hàn cho các vật liệu và chiều dày khác nhau, giảm khuyết tật, tăng năng suất, việc ứng dụng các thuật toán tối ưu hóa các thông số quá trình là hết sức cần thiết. Các thông số đầu vào được nghiên cứu chủ yếu là công suất laser, tốc độ hàn, tiêu điểm và đường kính sợi quang có ảnh hưởng rất lớn đến các thông số đáp ứng. Mỗi hàn của kim loại nền được quyết định bởi hai thông số liên quan mật thiết với nhau: công suất laser và tốc độ hàn. Kích thước vùng hàn, vùng ảnh hưởng nhiệt, độ ngấu mối hàn phụ thuộc vào tiêu điểm và đường kính sợi quang.

Dựa trên các nghiên cứu đã trình bày trong mục 1.1.3 cho thấy tính hiệu quả của phương pháp phần tử hữu hạn với h-refinement và p-refinement. Tuy nhiên, chưa có nhiều nghiên cứu đánh giá độ tin cậy phương pháp phần tử hữu hạn với h-refinement và p-refinement cho mỗi hàn nói chung và hàn laser nói riêng.

1.2. Mục tiêu nghiên cứu

- ✓ Xác định ngược giá trị hệ số hấp thụ của mối hàn điểm laser cho thép không gỉ AISI 304
- ✓ Tối ưu hóa thông số đầu vào của mối hàn laser cho thép không gỉ AISI 416 và AISI 440FSe để đạt được kích thước mối hàn (kích thước mối hàn được cài đặt trước)
- ✓ Đánh giá sai số, tốc độ hội tụ, độ tin cậy cho mối hàn giáp mối thép AISI 1018 bằng laser.

1.3. Nội dung nghiên cứu

Trên cơ sở lý thuyết về truyền nhiệt, phương pháp phần tử hữu hạn, phương pháp Modified Newton – Raphson đề xuất phương pháp tuần tự (sequential method) để xác định giá trị hệ số hấp thụ của mối hàn điểm laser cho thép không gỉ AISI 304. Thông qua kết quả xác định giá trị này, thước mối hàn cũng được tiên đoán một cách chính xác.

Tìm hiểu một số thuật toán ngẫu nhiên và đề xuất ba thuật toán tối ưu GA, JAYA, MDE để tìm kiếm các thông số hàn laser nhằm đạt được kích thước mỗi hàn mong muốn, góp phần giảm chi phí trong thực nghiệm và sản xuất.

Nghiên cứu tính hiệu quả của phương pháp phần tử hữu hạn với h-refinement, p-refinement và đề xuất áp dụng đánh giá sai số, tốc độ hội tụ, độ tin cậy cho mô hình mỗi hàn laser chịu kéo.

1.4. Phương pháp nghiên cứu

- ✚ Nghiên cứu cơ sở lý thuyết liên quan luận án thông qua một số tài liệu, bài báo khoa học trên tạp chí, hội nghị khoa học chuyên ngành:
 - Áp dụng phương pháp tuần tự để giải quyết bài toán xác định ngược giá trị hệ số hấp thụ của mỗi hàn điểm laser cho thép không gỉ AISI 304
 - Sử dụng ba thuật toán ngẫu nhiên để thực hiện tối ưu hóa thông số đầu vào của mỗi hàn laser cho thép không gỉ AISI 416 và AISI 440FSe
 - Sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn với h-refinement, p-refinement để đánh giá sai số, tốc độ hội tụ, độ tin cậy cho mỗi hàn giáp mỗi thép AISI 1018 bằng laser.
- ✚ Lập trình, mô phỏng số với sự hỗ trợ của phần mềm Matlab trên máy tính cá nhân và kết quả mô phỏng được đánh giá dựa vào một số tiêu chí; được so sánh với lời giải chính xác hoặc kết quả nghiên cứu của công trình đã được công bố.

1.5. Bộ cục luận án

Luận án được trình bày chủ yếu trong 05 chương:

Chương 1. Tổng quan tình hình nghiên cứu

Chương 2. Đánh giá mật độ dòng nhiệt laser của mỗi hàn điểm cho thép không gỉ AISI 304 bằng phương pháp tuần tự

Chương 3. Tối ưu hóa thông số quy trình nhằm đạt được kích thước mỗi hàn laser cho thép không gỉ AISI 416 và AISI 440FSe bằng các thuật toán ngẫu nhiên

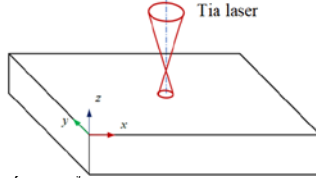
Chương 4. Đánh giá độ tin cậy phương pháp phần tử hữu hạn với h-refinement và p-refinement cho mỗi hàn giáp mỗi thép AISI 1018 bằng laser.

Chương 5. Kết luận và hướng phát triển

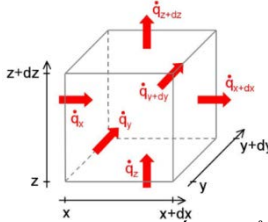
Chương 2
ĐÁNH GIÁ MẬT ĐỘ DÒNG NHIỆT LASER
CỦA MỐI HẠN ĐIỂM CHO THÉP KHÔNG GỈ
AISI 304 BẰNG PHƯƠNG PHÁP TUẦN TỰ

2.1. Mô hình toán vật thể truyền nhiệt dẫn nhiệt 3D dưới tác động của nguồn laser

2.1.1. Phương trình truyền nhiệt



Hình 2.1. Tấm phẳng được gia nhiệt bởi một tia laser



Hình 2.2. Phân tử vật thể

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_v = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial n} - q_s + h(T - T_o) + \sigma \varepsilon (T^4 - T_o^4) = 0 \quad (2.2)$$

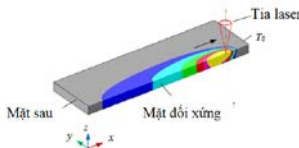
$$\xi = x - vt \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -v \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = 1 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -v \frac{\partial T}{\partial \xi} \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_v = -\rho C_p v \frac{\partial T}{\partial \xi} \quad (2.6)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = h(T - T_o) + \sigma \varepsilon (T^4 - T_o^4) \quad (2.7)$$

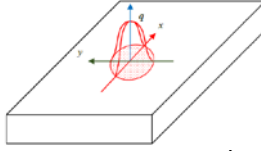


Hình 2.3. Chi tiết được gia nhiệt bởi tia laser dịch chuyển

2.1.2. Nguồn nhiệt của tia laser

Nguồn nhiệt tia laser dạng điểm, đường

Nguồn nhiệt bề mặt phân bố Gauss

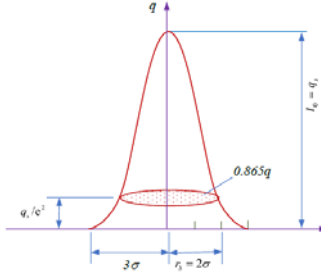


Hình 2.4. Mô hình đĩa tròn phân bố Gauss

$$q_s(r) = q(0)e^{-Cr^2} \quad (2.8)$$

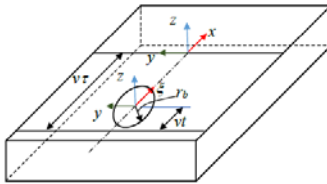
$$C = \frac{1}{r_b^2} \quad (2.9)$$

$$q_s(r) = I_o \exp\left(-\frac{3r^2}{r_b^2}\right) = \frac{3\eta P}{\pi r_b^2} \exp\left(-\frac{3r^2}{r_b^2}\right) \quad (2.10)$$



Hình 2.5. Nguồn nhiệt laser phân bố Gauss trên đĩa tròn

$$q_s(\xi, y) = \frac{3\eta P}{\pi r_b^2} \exp\left(-3\frac{\xi^2 + y^2}{r_b^2}\right) \quad (2.11)$$



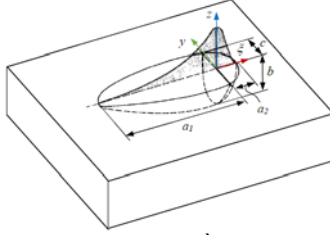
Hình 2.6. Mô hình đĩa trong tọa độ động

Mô hình nguồn nhiệt thể tích bán cầu phân bố Gauss

$$q_v(x, y, z) = \frac{6\sqrt{3}\eta P}{\pi\sqrt{\pi}r_b^3} \exp\left(-3\frac{x^2 + y^2 + z^2}{r_b^2}\right) \quad (2.12)$$

Mô hình nguồn nhiệt thể tích hình Elíp phân bố Gauss

$$q_v(x, y, z, t) = \frac{6\sqrt{3}\eta P}{abc\pi\sqrt{\pi}} \exp\left(-3\left(\frac{[x + v(\tau - t)]^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\right) \quad (2.13)$$



Hình 2.7. Mô hình nguồn nhiệt elíp kép

$$\dot{q}(\xi, y, z, t) = \frac{6\sqrt{3}f_{1,2}\eta P}{a_{1,2}bc\pi\sqrt{\pi}} \exp\left(-3\left(\frac{[x + v(\tau - t)]^2}{a_{1,2}} - 3\frac{y^2}{b^2} - 3\frac{z^2}{c^2}\right)\right) \quad (2.14)$$

2.1.3. Phương pháp phần tử hữu hạn cho bài toán truyền nhiệt

$$T = \sum_{i=1}^n [N_i(x, y, z)]\{T_i(t)\} \quad (2.15)$$

$$[C]\{\dot{T}\} - [K]\{T\} = -\{R\} \quad (2.16)$$

$$[C] = \int_{\Omega} \rho C_p [N]^T [N] d\Omega \quad (2.17)$$

$$[K] = \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega + \int_{\Gamma} h [N]^T [N] d\Gamma \quad (2.18)$$

$$\{R\} = \{R^{qv}\} - \{R^{qs}\} + \{R^h\}$$

$$\int_{\Omega} q_v [N]^T d\Omega - \int_{\Gamma} q_s [N]^T d\Gamma_q + \int_{\Gamma} h T_a [N]^T d\Gamma_h \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial T_m}{\partial t} \approx \frac{T_m - T_{m-1}}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (2.20)$$

$$T_{m+\lambda-1} = \lambda T_m + (1-\lambda)T_{m-1} \quad (2.21)$$

$$[C] \left\{ \frac{T_m - T_{m-1}}{\Delta t} \right\} + [K] \{ \lambda T_m + (1-\lambda)T_{m-1} \} = \lambda \{R\}_m + (1-\lambda) \{R\}_{m-1} \quad (2.22)$$

$$\{T\}_m = \left(\frac{C}{\Delta t} + \lambda [K] \right)^{-1} \left(\left[\frac{C}{\Delta t} - (1-\lambda)[K] \right] \{T\}_{m-1} + \left(\frac{C}{\Delta t} + \lambda [K] \right)^{-1} \{R\}_{\bar{m}} \right) \quad (2.23)$$

$$\{R\}_{\bar{m}} = \lambda \{R\}_m + (1-\lambda) \{R\}_{m-1} \quad (2.24)$$

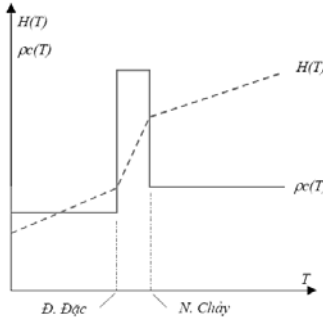
Trong trường hợp $\lambda = 0$, phương trình (2.23) được gọi là phương pháp sai phân tiến. Với $\lambda = 1$, phương trình (2.23) trở thành phương pháp sai phân lùi. Khi $\lambda = 0.5$, phương trình (2.23) được gọi là phương pháp Crank-Nicolson.

Đối với trường hợp $\lambda = 0$ và $\lambda = 1$, sai số do rời rạc thời gian bằng phương pháp sai phân là $O(\Delta t)$. Trong khi phương pháp Crank-Nicolson ($\lambda = 0.5$), sai số là $O(\Delta t^2)$

2.1.4. Phương pháp nhiệt dung riêng hiệu dụng trong bài toán thay đổi pha

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (2.25)$$

$$c_{eff} = \frac{\partial H}{\partial T} \quad (2.26)$$



Hình 2.8. Sự thay đổi của nhiệt dung riêng hiệu dụng và enthalpy

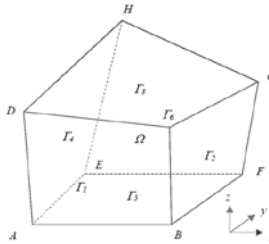
$$\begin{aligned} c_{eff} &= \rho c_s & (T \leq T_s) \\ c_{eff} &= \rho c_f + \frac{L}{T_l - T_s} & (T_s < T < T_l) \\ c_{eff} &= \rho c_l & (T \geq T_l) \end{aligned} \quad (2.27)$$

2.2. Phương pháp giải quyết bài toán nhiệt của hàn điểm laser

2.2.1. Đặt vấn đề

Xác định giá trị hệ số hấp thụ trong quá trình xử lý vật liệu bằng laser từ việc đo trực tiếp là rất khó do vị trí bề mặt được gia nhiệt có trường nhiệt độ rất cao và gradient nhiệt độ rất nhạy. Vì vậy, các nhà nghiên cứu thường chọn phương pháp ngược để xác định hệ số này trong quá trình xử lý bề mặt bằng laser.

2.2.2. Bài toán thuận



Hình 2.9. Truyền nhiệt ba chiều tổng quát

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_v = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.28)$$

$$T = T_b \text{ trên biên } \Gamma_1 \text{ \& } \Gamma_2 \quad (2.29)$$

$$-n_q(-k\Delta T) = q_s \text{ trên biên } \Gamma_3 \text{ \& } \Gamma_4 \quad (2.30)$$

$$-n_v(-k\Delta T) = h(T - T_0) \text{ trên biên } \Gamma_5 \text{ \& } \Gamma_6 \quad (2.31)$$

$$T(x, y, z, 0) = T_0; \quad t = t_0 \quad (2.32)$$

2.2.3. Phương pháp tuần tự (Sequential method)

Xác định ngược các thông số đầu vào tại mỗi bước thời gian gồm hai quá trình: quá trình giải bài toán thuận và bài toán ngược.

Cụ thể, tại mỗi bước thời gian, phương pháp này gồm 4 vấn đề cần giải quyết:

Vấn đề 1: Bài toán thuận (Direct/forward problem)

Tại thời điểm $t = t_m$, phương trình (2.28) và điều kiện biên có dạng sau:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T_m}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T_m}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T_m}{\partial z} \right) + \phi_m^{q_v, i_{qv}} = \rho C \frac{\partial T_m}{\partial t} \quad (2.33)$$

$$T_b(x_i, y_i, z_i, t_m) = \phi_m^{q_s, i_{qs}} \quad (2.34)$$

$$q_{s,m}(x_i, y_i, z_i, t_m) = \phi_m^{q_s, i_{qs}} \quad (2.35)$$

$$q_{c,m}(x_i, y_i, z_i, t_m) = \phi_m^{q_c, i_{qc}} \quad (2.36)$$

$$T(x, y, z, t_{m-1}) = T_{m-1} \quad (2.37)$$

$$\begin{cases} \phi_{m+r}^T = \phi_m^T + \zeta(r-1)(\phi_m^T - \phi_{m-1}^T) \\ \phi_{m+r}^{qs} = \phi_m^{qs} + \zeta(r-1)(\phi_m^{qs} - \phi_{m-1}^{qs}) \\ \phi_{m+r}^c = \phi_m^c + \zeta(r-1)(\phi_m^c - \phi_{m-1}^c) \\ \phi_{m+r}^{qv} = \phi_m^{qv} + \zeta(r-1)(\phi_m^{qv} - \phi_{m-1}^{qv}) \end{cases} \quad (2.38)$$

Vấn đề 2: Bài toán phân tích độ nhạy

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T_m}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T_m}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T_m}{\partial z} \right) + \frac{\partial \phi_m^{q_v, i_{qv}}}{\partial \phi_m^{q_s, i_{qs}}} = \rho C \frac{\partial T_m}{\partial t} \quad (2.39)$$

$$X_b(x_i, y_i, z_i, t_m) = \frac{\partial \phi_m^{T, i_T}}{\partial \phi_m^{q_s, i_{qs}}} \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial q_{s,m}(x_i, y_i, z_i, t_m)}{\partial \phi_m^{q_s, i_{qs}}} = \frac{\partial \phi_m^{qs, i_{qs}}}{\partial \phi_m^{q_s, i_{qs}}} \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial q_{c,m}(x_i, y_i, z_i, t_m)}{\partial \phi_m^{q_c, i_{qc}}} = \frac{\partial \phi_m^{qc, i_{qc}}}{\partial \phi_m^{q_c, i_{qc}}} \quad (2.42)$$

$$X(x_i, y_i, z_i, t_{m-1}) = X_{m-1} = 0 \quad (2.43)$$

$$X_m(x_i, y_i, z_i, t_m) = \frac{\partial T_m(x_i, y_i, z_i, t_m)}{\partial \phi_m^{q_s, i_{qs}}} \quad (2.44)$$

Vấn đề 3: Phương pháp Modified Newton-Raphson (MNR)

$$\Phi^{j,j} = \Phi_c^{j,j} - \Phi_m^{j,j} = 0 \quad (2.45)$$

$$p \times r > n_T + q_{qs} + n_c + n_{qv} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} \Phi &= [\Phi^{j,m}, \Phi^{j,m+1}, \Phi^{j,m+2}, \dots, \Phi^{j,m+r}]^T \\ \Phi &= [\Phi^{1,m}, \Phi^{1,m+1}, \Phi^{1,m+2}, \dots, \Phi^{1,m+r}, \\ &\quad \Phi^{2,m}, \Phi^{2,m+1}, \Phi^{2,m+2}, \dots, \Phi^{2,m+r}, \\ &\quad \dots \dots \dots \\ &\quad \Phi^{p,m}, \Phi^{p,m+1}, \Phi^{p,m+2}, \dots, \Phi^{p,m+r}]^T \\ \Phi &= \{\widehat{\Phi}_u\} \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} x &= \{\Phi_m^{T,1}, \Phi_m^{T,2}, \dots, \Phi_m^{T,n_T}, \Phi_m^{qs,1}, \Phi_m^{qs,2}, \dots, \Phi_m^{qs,n_{qs}}, \\ &\quad \Phi_m^{c,1}, \Phi_m^{c,2}, \dots, \Phi_m^{c,n_c}, \Phi_m^{qv,1}, \Phi_m^{qv,2}, \dots, \Phi_m^{qv,n_{qv}}\}^T \\ &= \{x_1, x_2, \dots, x_{n_T+n_{qs}+n_c+n_{qv}}\} = \{x_v\}^T \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [\Psi^T(x^{(k)}) \Psi(x^{(k)})]^{-1} \Psi^T(x^{(k)}) \Phi(x^{(k)}) \quad (2.49)$$

Vấn đề 4: Tiêu chuẩn dừng

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| / \|x^{(k+1)}\| \leq \delta \quad (2.50)$$

$$\|J(x^{(k+1)}) - J(x^{(k)})\| / \|J(x^{(k+1)})\| \leq \varepsilon_s \quad (2.51)$$

$$\text{Với } \|J(x^{(k+1)})\| = \sum_{i=1}^r [\Phi_c^i - \Phi_{cm}^i]^2 \quad (2.52)$$

2.2.4. Thuật toán

Bước 1: Giải phương trình truyền nhiệt thuận (phương trình (2.33)), tính toán trường nhiệt độ Φ_c .

Bước 2: Sử dụng trường nhiệt độ Φ_c và Φ_m để xây dựng Φ (phương trình (2.47)).

Bước 3: Tính toán ma trận độ nhạy Ψ (phương trình (2.39)).

Bước 4: Tính toán $x^{(k+1)}$ từ phương trình (2.49)

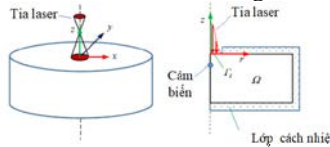
Bước 5: Dừng vòng lặp nếu điều kiện dừng trong phương trình (2.50) - (2.52) thỏa mãn.

Bước 6: Kết thúc quá trình lặp nếu tới bước thời gian cuối cùng.

Ngược lại, tính cho bước thời gian tiếp theo ($j = m + 1$)

2.3. Kết quả minh chứng và thảo luận

2.3.1. Phát biểu bài toán hàn điểm bằng laser



Hình 2.10. Mô hình hàn điểm laser

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rk(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(rk(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \rho(T) C(T) \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.53)$$

$$\text{Tại mặt chiếu tia laser } (\Gamma_s) : -k(T) \frac{\partial T}{\partial x} = q(r) \quad (2.54)$$

$$\text{Tại các mặt còn lại: } \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (2.55)$$

$$T(r, z, 0) = T_0 \quad (2.56)$$

$$q(r) = \frac{3.P.\eta}{\pi r_b^2} \exp\left(\frac{-3r^2}{r_b^2}\right) \quad (2.57)$$

2.3.2. Phương pháp tuần tự (Sequential method)

Bài toán thuận

Tại thời điểm $t = t_m$, phương trình truyền nhiệt của hàn điểm được viết như sau:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rk(T_m) \frac{\partial T_m}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(rk(T_m) \frac{\partial T_m}{\partial z} \right) = \rho(T_m) C(T_m) \frac{\partial T_m}{\partial t} \quad (2.58)$$

$$\text{Tại mặt chiếu tia laser } (\Gamma_s): -k(T_m) \frac{\partial T_m}{\partial x} = q_m(r) \quad (2.59)$$

$$\text{Tại các mặt còn lại: } \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (2.60)$$

$$T(r, z, t_{m-1}) = T_{m-1} \quad (2.61)$$

$$q_m(r) = \frac{3P.\eta_m}{\pi r_b^2} \exp\left(\frac{-3r^2}{r_b^2}\right) \quad (2.62)$$

$$\hat{\eta}_{m+r}^a = \hat{\eta}_m^a + \xi(r-1)(\hat{\eta}_m^a - \hat{\eta}_{m-1}^a) \quad (2.63)$$

Bài toán phân tích độ nhạy

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rk(T_m) \frac{\partial X_m}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(rk(T_m) \frac{\partial X_m}{\partial z} \right) = \rho(T_m) C(T_m) \frac{\partial X_m}{\partial t} \quad (2.64)$$

$$\text{Tại mặt chiếu tia laser } (\Gamma_s): -k(T_m) \frac{\partial X_m}{\partial x} = \frac{\partial q_m(r)}{\partial \hat{\eta}_m} \quad (2.65)$$

$$\text{Tại các mặt còn lại: } \frac{\partial X_m}{\partial x} = 0 \quad (2.66)$$

$$X(r, z, t_{m-1}) = X_{m-1} = 0 \quad (2.67)$$

Vấn đề độ nhạy được giải giống như vấn đề thuận với r bước thời gian bằng phương pháp phần tử hữu hạn.

Phương pháp Modified Newton-Raphson (MNR)

$$\hat{\eta}_m^{(k+1)} = \hat{\eta}_m^{(k)} - \left[X^T(\hat{\eta}_m^{(k)}) X(\hat{\eta}_m^{(k)}) \right]^{-1} X^T(\hat{\eta}_m^{(k)}) \Phi(\hat{\eta}_m^{(k)}) \quad (2.68)$$

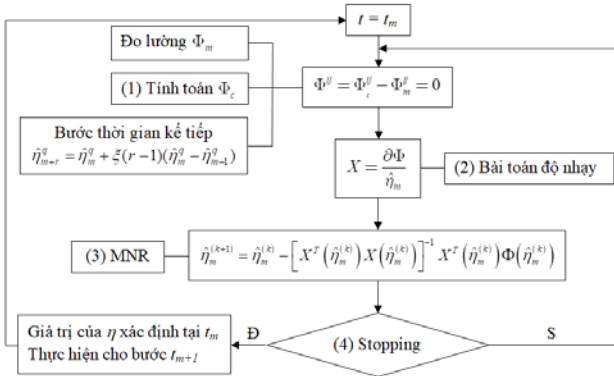
Tiêu chuẩn dừng

$$\left\| \hat{\eta}_m^{(k+1)} - \hat{\eta}_m^{(k)} \right\| / \left\| \hat{\eta}_m^{(k+1)} \right\| \leq \delta \quad (2.69)$$

$$\left\| S(\hat{\eta}_m^{(k+1)}) - S(\hat{\eta}_m^{(k)}) \right\| / \left\| S(\hat{\eta}_m^{(k+1)}) \right\| \leq \varepsilon_s \quad (2.70)$$

$$\text{Trong đó: } \left\| S(\hat{\eta}_m^{(k+1)}) \right\| = \sum_{i=1}^r [\Phi_c^i - \Phi_m^i]^{-2} \quad (2.71)$$

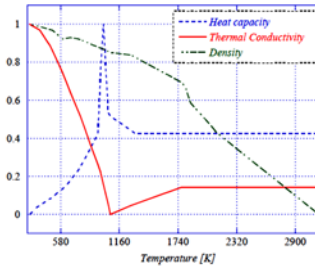
2.3.3. Thuật toán



Hình 2.11. Sơ đồ thuật toán

2.3.4. Kết quả và thảo luận

Hai trường hợp được đưa ra để chứng minh để xác định ngược giá trị hệ số hấp thụ trong hàn điểm laser.

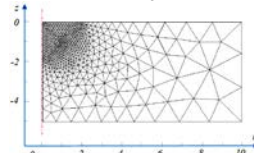


Hình 2.12. Đặc tính vật liệu của AISI 304

Trong hai trường hợp, một mẫu hàn trụ tròn có chiều cao là $H = 5\text{mm}$ và đường kính là $d = 20\text{mm}$ được sử dụng. Vật liệu sử dụng là thép không gỉ AISI 304 có được tính chất nhiệt phụ thuộc vào nhiệt độ, lấy từ nghiên cứu của Sabarikanth. Một cảm biến nhiệt giả định được nhúng tại vị trí $K(0, -1\text{mm})$.

$$T^m = T^c + \lambda_e \sigma \quad (2.72)$$

$$-2.576 \leq \lambda_e \leq 2.576$$



Hình 2.13. Lưới chia của FEM

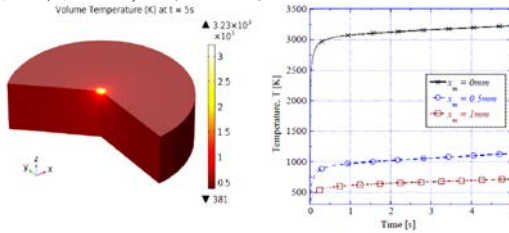
$$\mu = \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} \left| \frac{f - \hat{f}}{\hat{f}} \right| \quad (2.73)$$

a. Trường hợp 1

Trường hợp này, giá trị hệ số hấp thụ được giả sử là $\eta = 0.3$. Mẫu hàn ban đầu có nhiệt độ bằng nhiệt độ môi trường ($T_0 = 27^{\circ}\text{C}$) được gia nhiệt bằng tia laser có bán kính hiệu dụng là $r_b = 0.63\text{mm}$ với thời gian gia nhiệt là $t_f = 5\text{s}$. Tia laser có công suất $P = 400\text{W}$.

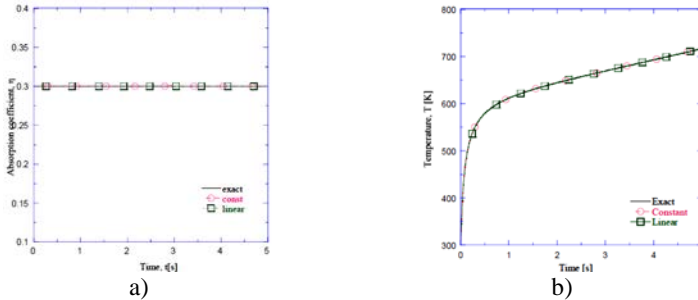
$$q_m(r) = \frac{3 \times 400 \times 0.3}{\pi \times (0.63 \times 10^{-3})^2} \exp\left(\frac{-3 \times r^2}{(0.63 \times 10^{-3})^2}\right) \left(\frac{W}{m^2}\right) \quad (2.74)$$

Trường nhiệt độ trong mẫu hàn tại thời điểm $t = 5\text{s}$ được thể hiện ở Hình 2.14a và sự thay đổi nhiệt độ theo thời gian tại bề mặt mẫu hàn tại một số vị trí $(0, 0)$, $(0, -0.5\text{mm})$, và $(0, -1\text{mm})$ được thể hiện ở Hình 2.14b.

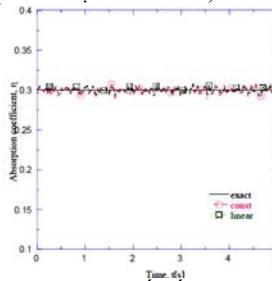


a) Trường nhiệt độ b) $T(0,0,t)$, $T(0,-0.5\text{mm},t)$, $T(0,-1\text{mm},t)$

Hình 2.14. Trường nhiệt độ trong mẫu hàn



Hình 2.15. Kết quả xác định với $\sigma = 0$, Trường hợp 1



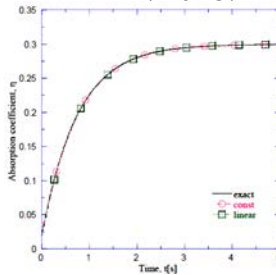
Hình 2.16. Kết quả xác định giá trị hệ số hấp thụ với $\sigma = 1.5$ với $r = 2$

Bảng 2.1. Sai số tương đối trung bình trong với $\sigma \neq 0$, Trường hợp 1

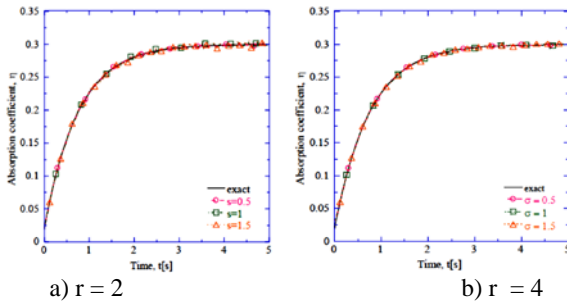
Trường hợp	Bước thời gian kế tiếp r	
	2	4
Hằng số		
$\sigma = 1$	0.0053	0.0022
$\sigma = 1.5$	0.008	0.0033
Tuyến tính		
$\sigma = 1$	0.0066	0.0041
$\sigma = 1.5$	0.01	0.0044

b. Trường hợp 2

$$\eta(t) = 0.3 \times (1 - 6.5 \times 10^{-1}) \exp\left(-\frac{t-2}{0.75}\right) \quad (2.75)$$



Hình 2.17. Kết quả xác định giá trị hệ số hấp thu với $\sigma = 0$ với $r = 2$ trong trường hợp 2

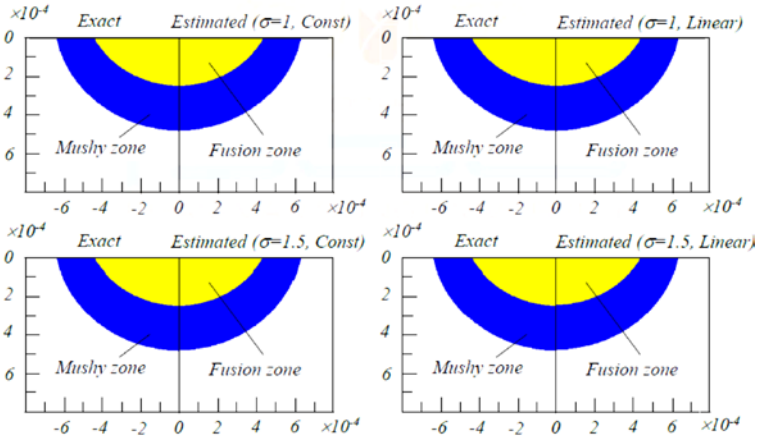


Hình 2.18. Kết quả xác định giá trị hệ số hấp thu trong trường hợp 2

Bảng 2.2. Sai số tương đối trung bình trong với $\sigma \neq 0$, trường hợp 2

Trường hợp	Bước thời gian kế tiếp r	
	2	4
Hằng số		
$\sigma = 0.5$	0.0042	0.0061
$\sigma = 1$	0.0065	0.0072
$\sigma = 1.5$	0.0089	0.0094

Tuyến tính		
$\sigma = 0.5$	0.0071	0.0121
$\sigma = 1$	0.0102	0.0134
$\sigma = 1.5$	0.0133	0.0148



Hình 2.19. Kích thước chính xác (Exact) và kích thước xác định ngược (Estimated) của mỗi hàn

Bảng 2.3. Chiều rộng và chiều sâu mỗi hàn tại $t = 5s$ trong Trường hợp 2

Trường hợp	Chiều rộng (mm)	Chiều sâu (mm)
$\sigma = 0$	0.4425	0.2375
$\sigma = 1$ (Hằng số)	0.4418	0.2366
$\sigma = 1$ (Tuyến tính)	0.4419	0.2368
$\sigma = 1.5$ (Hằng số)	0.4415	0.2364
$\sigma = 1.5$ (Tuyến tính)	0.4416	0.2365

Bảng 2.4. Sai số chiều rộng và chiều sâu mỗi hàn tại $t = 5s$ trong Trường hợp 2

Trường hợp	Sai số chiều rộng (%)	Sai số chiều sâu (%)
$\sigma = 1$ (Hằng số)	0.158	0.379
$\sigma = 1$ (Tuyến tính)	0.136	0.295
$\sigma = 1.5$ (Hằng số)	0.23	0.46
$\sigma = 1.5$ (Tuyến tính)	0.2	0.42

Từ những kết quả được trình bày trong hai trường hợp trên, có thể nói rằng việc xác định ngược giá trị hệ số hấp thu trong hàn điểm bằng phương pháp tuần tự đạt kết quả rất tốt. Hơn nữa, dựa trên kết quả xác định của giá trị hệ số hấp thu, kích thước mỗi hàn cũng được tiên đoán một cách chính xác.

Chương 3

TỐI ƯU HÓA THÔNG SỐ QUY TRÌNH NHẪM ĐẠT ĐƯỢC KÍCH THƯỚC MỖI HÀN LASER CHO THÉP KHÔNG GỈ AISI 416 VÀ AISI 440FSE BẰNG CÁC THUẬT TOÁN NGẪU NHIÊN

3.1 Thuật toán tối ưu

3.1.1 Thuật toán di truyền

Bước	Nội dung từng bước
1	Cài đặt hệ số lai tạo (CF) và hệ số đột biến (MF) của thuật toán GA
2	Khởi tạo quần thể \mathbf{X} với N cá thể và mỗi cá thể có D đặc trưng
3	Xét thể hệ thứ nhất: $k=1$ Tính giá trị hàm mục tiêu của từng cá thể trong thể hệ thứ k :
4	$F_i^k = f(X_i^k), \forall i$ và tìm vị trí cá thể có giá trị hàm mục tiêu tốt nhất $b \in \{1, 2, \dots, N\}$
5	Thực hiện lựa chọn, lai tạo và đột biến để có các cá thể mới trong quần thể: $X_i^{k+1}, \forall i$ Tính giá trị hàm mục tiêu của từng cá thể trong thể hệ thứ $k+1$:
6	$F_i^{k+1} = f(X_i^{k+1}), \forall i$ và nhận dạng vị trí cá thể có giá trị hàm mục tiêu tốt nhất b_1
7	Nếu $F_{b_1}^{k+1} < F_b^k$ thì $b = b_1$
8	Nếu $k < Maxite$ thì $k = k + 1$ và quay lại bước 5, còn không thực hiện bước 9
9	Xuất cá thể tốt nhất X_b^k

3.1.2 Thuật toán JAYA

Bước	Nội dung từng bước
1	Khởi tạo quần thể \mathbf{X} với N cá thể và mỗi cá thể có D đặc trưng
2	Xét thể hệ thứ nhất: $k=1$
3	Tính giá trị hàm mục tiêu của từng cá thể trong thể hệ thứ k : $F_i^k = f(X_i^k), \forall i$ và tìm vị trí cá thể có giá trị hàm mục tiêu tốt nhất $best$ và vị trí cá thể có giá trị hàm mục tiêu tốt nhất $worst$.
4	Thực hiện chỉnh lại từng cá thể trong quần thể tại thể hệ thứ k theo phương trình sau:

$$X_{i,j}^k = X_{i,j}^k + r_{1,i}^k \left(X_{best,j}^k - |X_{i,j}^k| \right) - r_{2,i}^k \left(X_{worst,j}^k - |X_{i,j}^k| \right), \quad \forall i, j$$

Trong đó, $X_{i,j}^k$ được cập nhật dựa vào $X_{i,j}^k$; $r_{1,i}^k$ và $r_{2,i}^k$ là hai hệ số ngẫu nhiên nằm trong khoảng $[0, 1]$. Thành phần $r_{1,i}^k \left(X_{best,j}^k - |X_{i,j}^k| \right)$ làm cho cá thể hiện tại tiến gần tới cá thể tối ưu.

Thành phần $-r_{2,i}^k \left(X_{worst,j}^k - |X_{i,j}^k| \right)$ làm cho cá thể hiện tại tránh xa cá thể xấu.

5 Thực hiện lựa chọn lại những cá thể đã được hiệu chỉnh $\forall i$

$$X_{i,j}^{k+1} = \begin{cases} X_{i,j}^k, \forall j & \text{if } f(X_{i,j}^k) < F_i^k \\ X_{i,j}^k, \forall j & \text{if } f(X_{i,j}^k) \geq F_i^k \end{cases}$$

6 Tính giá trị hàm mục tiêu của từng cá thể trong thế hệ thứ $k+1$: $F_i^{k+1} = f(X_i^{k+1})$, $\forall i$ và tìm vị trí cá thể có giá trị hàm mục tiêu tốt nhất *best* và vị trí cá thể có giá trị hàm mục tiêu tốt nhất *worst*.

7 Nếu $k < Maxite$ thì $k = k + 1$ và quay lại thực hiện bước 4, còn không thực hiện bước tiếp theo.

8 Xuất cá thể tốt nhất X_{best}^k .

3.1.3 Thuật toán MDE

Pseudo-code của thuật toán MDE

Begin

Initialization

Evaluation

For $G=1$ to GEN **do**

For $i=1$ to NP **do**

$j_{rand} = \text{randint}(1, D)$

$F = \text{rand}[0:4; 1:0]$, $CR = \text{rand}[0:7; 1:0]$

For $j=1$ to D **do**

If $\text{rand}[0,1] < CR$ or $j == j_{rand}$ **then**

If $\text{rand}[0,1] > \text{threshold}$ **then**

 Select randomly $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq i$

$u_{i,j,G+1} = x_{r_1,j,G} + F(x_{r_2,j,G} - x_{r_3,j,G})$

Else

 Select randomly $r_1 \neq r_2 \neq best \neq i$

$u_{i,j,G+1} = x_{best,j,G} + F(x_{r_1,j,G} - x_{r_2,j,G})$

End if

Else

$$u_{i,j,G+1} = x_{i,j,G}$$

End if

End for

If $f(\vec{U}_{i,G+1}^*) \leq f(\vec{X}_{i,G})$ then

$$\vec{X}_{i,G+1} = \vec{U}_{i,G+1}^*$$

Else

$$\vec{X}_{i,G+1} = \vec{X}_{i,G}$$

End if

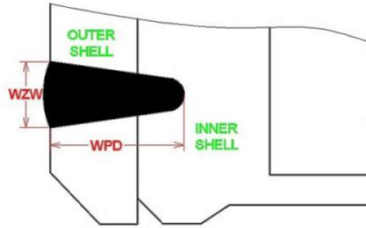
End for

End for

End

3.2. Xây dựng bài toán tối ưu

3.2.1 Khảo sát mối hàn laser



(WZW: Weld Zone Width – Bề rộng mối hàn,
WPD: Weld Penetration Depth – Độ ngấu mối hàn)

Hình 3.1. Thông số đầu ra của mối hàn laser

$$WZW = (-221.78917 + 0.26482 \times LP + 21.185 \times WS + 1.265 \times FD) \quad (3.1)$$

$$WPD = (891.94 + 213.06 \times LP - 250.69 \times WS - 93.61 \times FD - 73.75 \times LP \times WS - 26.94 \times LP \times FD + 30.97 \times WS \times FD) \times (1e-4) \quad (3.2)$$

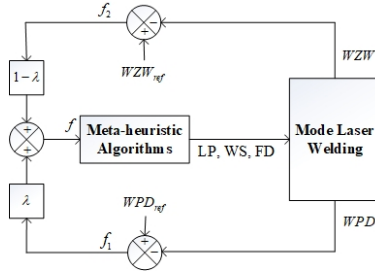
3.2.2 Hàm mục tiêu

$$\begin{cases} f_1 = |WZW_{ref} - WZW| \\ f_2 = |WPD_{ref} - WPD| \end{cases} \quad (3.3)$$

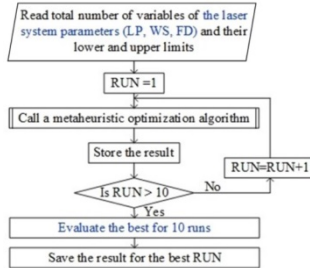
Điều đó có nghĩa là luận án trình bày việc tiến hành tìm giá trị nhỏ nhất của hai hàm mục tiêu f_1 và f_2 . Hay phương trình (3.3) được viết dưới dạng như sau:

$$\begin{cases} f = \lambda \times |WZW_{ref} - WZW| + (1 - \lambda) \times |WPD_{ref} - WPD| \\ WZW_{min} \leq WZW \leq WZW_{max}; WPD_{min} \leq WPD \leq WPD_{max} \end{cases} \quad (3.4)$$

3.2.3. Tham số của các thuật toán và lưu đồ thực hiện tối ưu



Hình 3.2. Sơ đồ thực hiện tối ưu thông số hàn laser



Hình 3.3. Lưu đồ thuật toán thực hiện tối ưu thông số .

Bảng 3.3. Tham số của các thuật toán GA, JAYA và MDE

Thuật toán	Tham số	Giá trị
GA	Xác suất đột biến	0.2
	Xác suất lai ghép	0.7
JAYA	Không	
MDE	Hệ số đột biến (F)	Random [0.4; 1.0]
	Xác suất lai tạo (CR)	Random [0.7; 1.0]

3.3. Kết quả và thảo luận

Bảng 3.4. Giới hạn thông số của

Thông số	Cận dưới	Cận trên
LP - Laser Power – Công suất laser	800 (W)	1100 (W)
WS - Welding Speed – Tốc độ hàn	4.5 (m/min)	7.0 (m/min)
FD - Fiber Diameter – Đường kính sợi quang	300 (μm)	400 (μm)

Vật liệu thực hiện mỗi hàn là thép không gỉ AISI 416 và AISI 440FSe với bề dày là 0.55 mm. Kích thước mong muốn cài đặt cho mỗi hàn là ($WZW_{ref} = 570\mu\text{m}$, $WPD_{ref} = 840\mu\text{m}$).

3.3.1. Thuật toán GA

Trọng số λ sử dụng trong phương trình (3.4) là 0.1

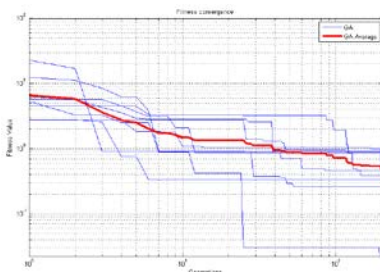
Bảng 3.5. Giá trị thông số đầu vào được tối ưu và giá trị tốt nhất của hàm mục tiêu sau 10 lần chạy

Số lần chạy	Thông số đầu vào được tối ưu	Giá trị hàm mục tiêu
-------------	------------------------------	----------------------

	LP (W)	WS (m/min)	FD (μm)	đạt tối ưu f (μm)
1	908.99	6.11	335.46	0.2599
2	943.69	6.27	322.46	0.2599
3	967.60	6.10	314.57	0.8741
4	920.25	5.62	332.43	0.9060
5	917.90	5.61	333.35	0.9151
6	927.37	6.40	327.94	0.4590
7	941.15	6.49	322.80	0.3359
8	911.00	6.14	334.59	0.4152
9	981.12	6.66	308.76	0.0222
10	942.22	6.31	322.99	0.3915

Bảng 3.6. So sánh giữa thông số đã tối ưu và kết quả thực nghiệm

$WZW_{ref} = 570 \mu\text{m}$ và $WPD_{ref} = 840 \mu\text{m}$			
	LP (W)	WS (m/min)	FD (μm)
Kết quả của Khan	1000	7.0	300
Kết quả của luận án	981.12	6.66	308.76
Sai số (%)	-1.89	-4.80	2.92



Hình 3.4. Giá trị trung bình của hàm mục tiêu f

Kết quả luận án được so sánh với kết quả thí nghiệm xác nhận I của Khan có sai số của các tham số đầu vào LP, WS và FD tương ứng là 1,89%, 4,80% và 2,92%.

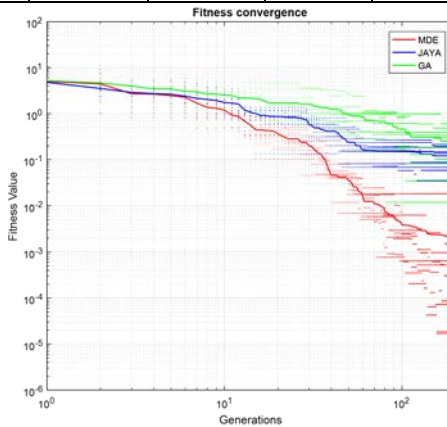
3.3.2. Thuật toán GA, JAYA và MDE

Trọng số λ sử dụng trong phương trình (3.4) là 0.5

Bảng 3.7. Giá trị thông số đầu vào được tối ưu và giá trị tốt nhất của hàm mục tiêu sau 10 lần chạy

Số lần chạy	Thuật toán	Thông số đầu vào được tối ưu			Giá trị hàm mục tiêu đạt tối ưu f (μm)
		LP (W)	WS (m/min)	FD (μm)	
1	GA	844.14	5.08	364.15	0.2919
	JAYA	930.97	6.19	327.12	0.0817
	MDE	881.92	5.61	347.23	5.91e-05

2	GA	902.20	5.86	338.69	0.1026
	JAYA	943.31	6.33	322.35	0.0585
	MDE	870.42	5.45	352.30	0.0002
3	GA	968.21	6.56	313.28	0.0339
	JAYA	1005.80	6.87	300.31	0.1841
	MDE	825.25	4.74	373.61	0.0002
4	GA	889.65	5.71	343.86	0.0814
	JAYA	1007.24	6.86	300	0.0882
	MDE	856.85	5.25	358.46	9.34e-06
5	GA	867.79	5.40	353.78	0.3083
	JAYA	956.56	6.47	317.44	0.2135
	MDE	988.92	6.73	306.05	3.07e-06
6	GA	894.23	5.74	342.18	0.3919
	JAYA	971.01	6.58	312.31	0.0682
	MDE	913.82	6.01	333.87	0.0004
7	GA	864.75	5.37	354.57	0.5660
	JAYA	810.89	4.50	380.83	0.0841
	MDE	901.90	5.87	338.75	0.0005
8	GA	893.07	5.74	342.88	0.4838
	JAYA	839.47	4.99	366.59	0.0872
	MDE	965.77	6.54	314.13	0.0001
9	GA	919.62	6.08	331.55	0.0118
	JAYA	843.65	5.05	364.62	0.0350
	MDE	991.82	6.76	305.05	0.0180
10	GA	884.84	5.64	346.11	0.1871
	JAYA	847.98	5.14	362.49	0.1944
	MDE	837.43	4.95	367.63	4.57e-05



Hình 3.5. Giá trị trung bình của hàm mục tiêu f

Bảng 3.8. Bộ thông số tối ưu với từng thuật toán

Thuật toán	Thông số đầu vào được tối ưu			Giá trị hàm mục tiêu đạt tối ưu $f(\mu m)$
	LP (W)	WS (m/min)	FD (μm)	
GA	919.62	6.08	331.55	0.0118
JAYA	843.65	5.05	364.62	0.0350
MDE	988.92	6.73	306.05	3.07e-06

Bảng 3.9. So sánh giữa thông số đã tối ưu và kết quả thực nghiệm

$WZW_{ref}=570 \mu m$ và $WPD_{ref}=840 \mu m$				
	LP (W)	WS (m/min)	FD (μm)	
Kết quả của Khan [31]	1000	7.0	300	
Sai số (%)	GA	-8.03	-13.14	10.51
	JAYA	-15.70	-27.80	21.54
	MDE	-1.10	-3.85	2.01

Bảng 3.10. Bộ tham số tối ưu

Thuật toán MDE				
		LP (W)	WS (m/min)	FD (μm)
$WZW_{ref}=660 \mu m$ $WPD_{ref}=634 \mu m$	Kết quả của Khan [31]	900.00	6.50	400.00
	Kết quả của luận án ($\lambda = 0.9$)	859.05	6.99	399.99
	Sai số (%)	-4.5	7.5	0.0025
$WZW_{ref}=485 \mu m$ $WPD_{ref}=939 \mu m$	Kết quả của Khan [31]	850.00	5.000	300.00
	Kết quả của luận án ($\lambda = 0.9$)	875.90	4.501	300.01
	Sai số (%)	3.04	-9.9	3.3e-3

Tóm lại, các kết quả mô phỏng và thực nghiệm cho thấy, với thông số đầu vào: công suất laser - Laser Power 'LP' (W), tốc độ hàn - Welding Speed 'WS' (m/min), và đường kính sợi quang - Fiber Diameter 'FD' (μm) được tối ưu nhằm đạt được kích thước mối hàn theo ý muốn (WZW_{ref} , WPD_{ref}), nhờ sử dụng thuật toán MDE có tính khả thi cao.

Chương 4
ĐÁNH GIÁ ĐỘ TIN CẬY
PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN
VỚI h- REFINEMENT VÀ p- REFINEMENT
CHO MÔI HÀN GIÁP MÔI THÉP AISI 1018 BẰNG LASER

4.1. Sai số, tốc độ hội tụ và độ tin cậy trong xấp xỉ phần tử hữu hạn

4.1.1. Sai số

➤ Sai số trên trường chuyển vị: $(\mathbf{e}_h)_u = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$ (4. 1)

➤ Sai số trên trường ứng suất: $(\mathbf{e}_h)_\sigma = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h$ (4. 2)

$$\|e_h\|_{\Omega_e} = \left(\int_{\Omega_e} (e_h)_\sigma^T H^{-1} (e_h)_\sigma d\Omega \right)^{1/2} \quad (4. 3)$$

$$\|e_h\|_{\Omega} = \left(\int_{\Omega} (e_h)_\sigma^T H^{-1} (e_h)_\sigma d\Omega \right)^{1/2} = \left(\sum_{e=1}^n \|e_h\|_{\Omega_e}^2 \right)^{1/2} \quad (4. 4)$$

$$\varepsilon_e \approx \|e_h\|_{\Omega_e} \quad (4. 5)$$

$$\varepsilon \approx \|e_h\|_{\Omega} \quad (4. 6)$$

$$\eta = \frac{\|e_h\|_{\Omega}}{\|u_h\|_{\Omega}} \quad (4. 7)$$

$$\tilde{\eta} \approx \frac{\varepsilon}{\sqrt{\|u_h\|_{\Omega}^2 + \varepsilon^2}} \quad (4. 8)$$

$$\tilde{\eta}_e \approx \frac{\varepsilon_e}{\sqrt{\|u_h\|_{\Omega_e}^2 + \varepsilon_e^2}} \quad (4. 9)$$

4.1.2. Tiêu chuẩn hội tụ

❖ **Tốc độ hội tụ đại số:**

$$\|e\|_{E(\Omega)} = \|u_{EX} - u_{FE}\|_{E(\Omega)} \leq \frac{k}{N^\beta} \quad (4. 10)$$

❖ **Tốc độ hội tụ dạng hàm mũ với cơ số e:**

$$\|e\|_{E(\Omega)} = \|u_{EX} - u_{FE}\|_{E(\Omega)} \leq \frac{k}{\exp(\gamma N^\theta)} \quad (4. 11)$$

a. Sơ đồ ngoại suy Richardson:

- Năng lượng biến dạng chính xác:

$$U = \frac{1}{2} \|u\|_{\Omega}^2 \quad (4. 12)$$

- Năng lượng biến dạng phân tử hữu hạn:

$$U_h = \frac{1}{2} \|u_h\|_{\Omega}^2 \quad (4.13)$$

✚ Thủ tục của sơ đồ ngoại suy Richardson cho h -refinement gồm các bước sau:

Bước 1: Chọn trước một luật hội tụ cho sai số toàn miền, luật này thường viết dưới dạng đơn giản sau:

$$U - U_h = C \left(\frac{1}{N} \right)^{2r_c} \quad (4.14)$$

Bước 2: Sử dụng sơ đồ ngoại suy 3 điểm cho 3 lưới phân tử hữu hạn tương ứng (U_{h_i} , N_i).

Bước 3: Xác định 3 đại lượng chưa biết U , C , r_c bằng việc cực tiểu hóa phiếm hàm sau:

$$I = \sum_{i=1}^m \left(U - U_{h,i} - C \left(\frac{1}{N_i} \right)^{2r_c} \right)^2 \quad (4.15)$$

m : là số nghiệm.

⇒ Kỹ thuật này luôn luôn cho kết quả tốt và đặc biệt khi không biết lời giải chính xác.

✚ Thủ tục của sơ đồ ngoại suy Richardson cho p -refinement:

$$U - U_h = \frac{C}{\exp(\gamma N^{\theta})} \quad (4.16)$$

Các bước tiến hành hoàn toàn tương tự như h -refinement

b. Giải thuật sơ đồ ngoại suy qua 3 điểm Richardson:

Nhập vào: $[N] = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_n]^T$ - Số bậc tự do tương ứng lưới thứ i ;

Nhập vào: $[U_h] = [U_{h_1} \ U_{h_2} \ \dots \ U_{h_n}]^T$ - Log_{10} (Năng lượng biến dạng)

tương ứng với lưới thứ i ;

Nhập vào: step – số khoảng cần chia trên trục N ;

$$x = \left[N_1 : \frac{N_n - N_1}{\text{step}} : N_n \right]; \quad y = [\];$$

for $i = 1 \rightarrow (n - 2)$

$$\text{err} = \sqrt{\left(\frac{N_i^{-2r_c} - N_{i+1}^{-2r_c}}{N_{i+1}^{-2r_c} - N_{i+2}^{-2r_c}} - \frac{U_{h_i} - U_{h_{i+1}}}{U_{h_{i+1}} - U_{h_{i+2}}} \right)^2};$$

$$r_{c,i} = r_{c,i} \Big|_{\text{err} \rightarrow \min};$$

$$C_i = \frac{(U_{h_i} - U_{h_{i+1}})(N_i N_{i+1})^{2r_{e,j}}}{N_i^{2r_{e,j}} - N_{i+1}^{2r_{e,j}}};$$

$$U_i = U_{h_i} + C_i N_i^{-2r_{e,j}};$$

$$y = [y; U_i - C_i x^{-2r_{e,j}}];$$

end

4.1.3. Độ tin cậy

✚ Chỉ số hiệu dụng

$$\theta_e = \frac{\varepsilon_e}{\|e_h\|_{\Omega_e}} \quad (4.17)$$

Cấp độ toàn miền:

$$\theta = \frac{\varepsilon}{\|e_h\|_{\Omega}} \quad (4.18)$$

✚ Chỉ số đều

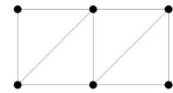
$$SD = \left[\frac{1}{n} \sum_{e=1}^n (\theta_e - \bar{\theta})^2 \right]^{1/2} \quad (4.19)$$

Trong đó $\bar{\theta}$ là giá trị trung bình của θ

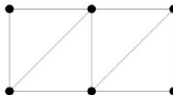
Một kỹ thuật đánh giá tin cậy nếu : với $1 \leq \eta (\%) \leq 10$, $0.8 \leq \theta \leq 1.2$, lúc đó $SD \leq 0.2$ ([94]).

4.2. Phân tích phần tử hữu hạn với h- refinement; p- refinement cho bài toán 2 chiều [97 – 99]

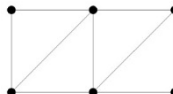
4.2.1. Giới thiệu



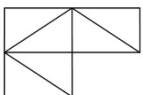
Lưới ban đầu



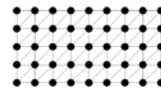
Lưới ban đầu



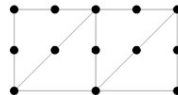
Lưới ban đầu



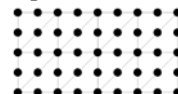
Lưới ban đầu



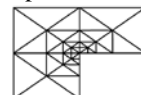
h- refinement



p- refinement



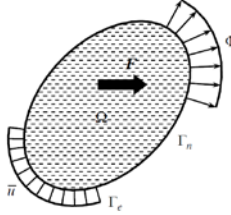
h- p- refinement



h-/p-/h- p- adaptive

4.2.2. Phân tích phần tử hữu hạn với h- refinement và p- refinement cho bài toán 2 chiều

a. Các bước tổng quát



Hình 4.1. Mô hình vật lý

❖ Xấp xỉ trường chuyển vị:

$$\{u\} = [N]\{d\} = \sum_n [N_i]\{d_i\} \quad (4.20)$$

❖ Viết các phương trình tương thích:

$$\{\varepsilon\} = [L]\{u\} = [L][N]\{d\} = [S]\{d\} \quad (4.21)$$

❖ Viết các phương trình ứng xử vật liệu:

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} = [E][B]\{d\} = [T]\{d\} \quad (4.22)$$

❖ Tính năng lượng biến dạng:

$$U(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} d\Omega = \frac{1}{2} \{d\}^T \int_{\Omega} \{B\}^T [E] \{B\} d\Omega \{d\} = \frac{1}{2} \{d\}^T [K] \{d\} \quad (4.23)$$

$$[K] = \int_{\Omega} \{B\}^T [E] \{B\} d\Omega \quad (4.24)$$

❖ Tính công của ngoại lực:

$$W(u) = - \int_{\Omega} \{q\}^T \{F\} d\Omega - \int_{\Gamma_n} \{q\}^T \Phi d\Gamma \quad (4.25)$$

$$= - \{q\}^T \left[\int_{\Omega} \{N\}^T \{F\} d\Omega + \int_{\Gamma_n} \{N\}^T \Phi d\Gamma \right] = - \{q\}^T \{g\}$$

$$\{g\} = \left[\int_{\Omega} \{N\}^T \{F\} d\Omega + \int_{\Gamma_n} \{N\}^T \Phi d\Gamma \right] \quad (4.26)$$

❖ Tính năng lượng tổng:

$$\pi(u) = U(u) + W(u) = \frac{1}{2} \{d\}^T [K] \{d\} - \{d\}^T \{g\} \quad (4.27)$$

❖ Áp dụng nguyên lý cực tiểu năng lượng:

$$\text{Min}_{\{d\}} \pi(u) \quad (4.28)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \pi}{\partial \{d\}} = [K] \{d\} - \{g\} = 0 \quad (4.29)$$

$$\Leftrightarrow [K] \{d\} = \{g\} \quad (4.30)$$

b. Trường chuyển vị

➤ h-refinement

$$\{u_h\} = \sum_{i=1}^n N_i d_i = [N_i] \{d_i\} \quad (4.31)$$

$$[k_{ii}] \{d_i\} = \{g_i\} \quad (4.32)$$

➤ p-refinement

$$\{u\} = \sum_{i=1}^n N_i d_i + \sum_{j=1}^s N_{h,j} d_{h,j} = [N_i] \{d_i\} + [N_h] \{d_h\} \quad (4.33)$$

$$\begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ih} \\ k_{ih}^T & k_{hh} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_i \\ d_h \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_h \end{Bmatrix} \quad (4.34)$$

c. Cơ sở nội suy Lagrange:

$$u(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x) u(x_i) \quad (4.35)$$

$$N_i(x) \equiv L_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \equiv \frac{x-x_1}{x_i-x_1} \times \frac{x-x_2}{x_i-x_2} \times \dots \times \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} \times \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} \times \dots \times \frac{x-x_n}{x_i-x_n} \quad (4.36)$$

$$N_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{với } i = j \\ 0 & \text{với } i \neq j \end{cases} \quad (4.37)$$

δ_{ij} : Kronecker delta

d. Hàm dạng Hierarchical:

🚩 Đa thức Legendre

Các đa thức Legendre $L_i(x)$ được định nghĩa trong khoảng $[-1, +1]$

$$\begin{cases} L_0(x) = 1 \\ L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n], \quad n=1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (4.38)$$

Là nghiệm của hệ phương trình vi phân:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0, \quad -1 < x < 1, \quad i=0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.39)$$

Các thuộc tính của các đa thức Legendre.

a. Trực giao:

$$(L_n, L_j) = \int_{-1}^1 L_n(x) L_j(x) dx = \frac{2}{2n+1} \begin{cases} 1 & \text{nếu } n=j \\ 0 & \text{Các trường hợp khác.} \end{cases} \quad (4.40a)$$

b. Đối xứng:

$$L_n(-x) = (-1)^n L_n(x), \quad n \geq 0 \quad (4.40b)$$

c. Đệ quy:

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x), \quad n \geq 1 \quad (4.40c)$$

d. Sự chuẩn hoá:

$$L_n(1) = 1, \quad n \geq 0 \quad (4.40d)$$

e. *Đệ qui vi phân:*

$$L'_{n+1}(x) = (2n+1)L_n(x) + L'_{n-1}(x), \quad n \geq 1 \quad (4.40e)$$

f. *Giới nội*

$$|L_n(x)| \leq 1, \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (4.40f)$$

Mười đa thức *Legendre* đầu tiên:

$$L_0(x) = 1,$$

$$L_1(x) = x,$$

$$L_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$L_3(x) = \frac{1}{2}x(5x^2 - 3),$$

$$L_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$

$$L_5(x) = \frac{1}{8}x(63x^4 - 70x^2 + 15),$$

$$L_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 315x^2 - 5),$$

$$L_7(x) = \frac{1}{16}x(429x^6 - 693x^4 + 315x^2 - 35),$$

$$L_8(x) = \frac{1}{128}(6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35), \quad (4.40g)$$

$$L_9(x) = \frac{1}{128}x(12155x^8 - 25740x^6 + 18018x^4 - 4620x^2 + 315),$$

$$L_{10}(x) = \frac{1}{256}(46189x^{10} - 109395x^8 + 90090x^6 - 30030x^4 + 3465x^2 - 63).$$

✚ Các hàm dạng Hierarchical:

$$\Phi_j(x) = \sqrt{\frac{2j-1}{2}} \int_{-1}^x L_{j-1}(t) dt, \quad j \geq 2 \quad (4.41a)$$

$$\Rightarrow \frac{d\Phi_j(x)}{dx} = \sqrt{\frac{2j-1}{2}} L_{j-1}(x) \quad (4.41b)$$

$$\Rightarrow \Phi_j(x) = \frac{1}{\sqrt{2(2j-1)}} [L_j(x) - L_{j-2}(x)] \quad (4.41c)$$

a. *Triệt tiêu trên biên.*

$$\Phi_j(-1) = \Phi_j(+1) = 0, \quad j \geq 2. \quad (4.41a)$$

b. *Trực giao trên đạo hàm bậc 2.*

$$\int_{-1}^1 \frac{d\Phi_i}{dx} \frac{d\Phi_j}{dx} dx = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i = j, \\ 0 & \text{các trường hợp khác} \end{cases} \quad (4.42b)$$

c. *Đối xứng.*

$$\Phi_j(-x) = (-1)^j \Phi_j(x) \quad (4.42c)$$

d. *Triệt tiêu trên tích phân với các hàm bậc lẻ.*

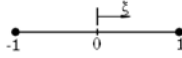
$$\int_{-1}^1 \Phi_j(x) dx = 0, \quad j = 3, 5, 7, \dots \quad (4.42d)$$

e. *Trực chuẩn.*

$$\int_{-1}^1 \Phi_i(x) \Phi_j(x) dx = \begin{cases} \frac{2}{(2i+1)(2i-3)}, & j=i \\ -\frac{1}{(2i-3)\sqrt{(2i-1)(2i-5)}}, & j=i-2 \\ -\frac{1}{(2i+1)\sqrt{(2i-1)(2i+3)}}, & j=i+2 \\ 0 & \text{các trường hợp khác} \end{cases} \quad (4.42e)$$

Các hàm dạng *Hierarchical* cho bài toán một chiều:

Khảo sát phần tử một chiều hai nút trong hệ tọa độ chuẩn $-1 \leq \xi \leq 1$ như hình 4.2.



Hình 4.2. Phần tử một chiều 2 nút.

Các hàm dạng tại nút (bậc 1):

$$P_0(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad \text{và} \quad P_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (4.43)$$

Bảng 4.1. Các hàm dạng *Hierarchical* 1 chiều

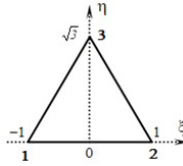
Bậc p	Hàm dạng <i>Hierarchical</i>
2	$P_2(\xi) = \frac{\sqrt{6}}{4}(\xi^2 - 1)$
3	$P_3(\xi) = \frac{\sqrt{10}}{4}\xi(\xi^2 - 1)$
4	$P_4(\xi) = \frac{\sqrt{14}}{16}(5\xi^4 - 6\xi^2 + 1)$
5	$P_5(\xi) = \frac{3\sqrt{2}}{16}\xi(7\xi^4 - 10\xi^2 + 3)$
6	$P_6(\xi) = \frac{\sqrt{22}}{32}(21\xi^6 - 35\xi^4 + 15\xi^2 - 1)$
7	$P_7(\xi) = \frac{\sqrt{26}}{32}\xi(33\xi^6 - 63\xi^4 + 35\xi^2 - 5)$
8	$P_8(\xi) = \frac{\sqrt{30}}{256}(429\xi^8 - 924\xi^6 + 630\xi^4 - 140\xi^2 + 5)$
9	$P_9(\xi) = \frac{\sqrt{34}}{256}\xi(715\xi^8 - 1716\xi^6 + 1386\xi^4 - 420\xi^2 + 35)$
10	$P_{10}(\xi) = \frac{\sqrt{38}}{512}(2431\xi^{10} - 6435\xi^8 + 6006\xi^6 - 2310\xi^4 + 315\xi^2 - 7)$



Hình 4.3. Đồ thị 10 hàm dạng và đạo hàm của hàm dạng Hierarchical 1 chiều.

Các hàm dạng hierarchical cho bài toán phẳng:

Phần tử tam giác:



Hình 4.4. Phần tử tam giác trong hệ tọa độ chuẩn.

Các hàm dạng tại nút.

$$\begin{cases} L_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \xi - \frac{\eta}{\sqrt{3}} \right) \\ L_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \xi - \frac{\eta}{\sqrt{3}} \right) \\ L_3 = \frac{\eta}{\sqrt{3}} \end{cases} \quad (4.44)$$

Các hàm dạng trên cạnh.

$$\begin{aligned} N_i^{(1)}(\xi, \eta) &= L_1 L_2 \varphi_i(L_1 - L_2), \quad i = 2, \dots, p. \\ N_i^{(2)}(\xi, \eta) &= L_2 L_3 \varphi_i(L_3 - L_2), \quad i = 2, \dots, p. \\ N_i^{(3)}(\xi, \eta) &= L_3 L_1 \varphi_i(L_1 - L_3), \quad i = 2, \dots, p. \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\Phi_j(x) = \frac{1}{4} (1 - x^2) \varphi_{j-2}(x) \quad (4.46)$$

Các hàm dạng trên mặt.

$(p-1)(p-2)/2$ hàm dạng trên mặt, khi bậc xấp xỉ $p \geq 3$

$$\text{Khi } p = 3 \quad N_1^{(0)} = L_1 L_2 L_3 \quad (4.47)$$

$$\text{Khi } p = 4 \quad N_1^{(0)} = L_1 L_2 L_3 P_1(L_2 - L_1) \quad (4.48)$$

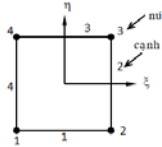
$$N_2^{(0)} = L_1 L_2 L_3 P_1(2L_3 - 1)$$

$$\begin{aligned} \text{Khi } p \geq 5 \quad N_j^{(0)} &= L_1 L_2 L_3 P_{i-j-2}(L_2 - L_1) P_{j-1}(2L_3 - 1), \\ & \quad j = 1, 2, \dots, i-2 \\ & \quad i = 5 \dots p. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Bảng 4.2. Số dofs trên phần tử tương ứng với bậc p cho phần tử tam giác.

Bậc p	DoFs liên kết tại nút	DoFs liên kết trên cạnh	DoFs liên kết trên mặt	Tổng dofs
1	3			3
2	3	3		6
3	3	6	1	10
4	3	9	2	15
5	3	12	3	21
6	3	15	4	28
7	3	18	5	36
8	3	21	6	45

Phần tử tứ giác:



Hình 4.5. Phần tử tứ giác trong hệ tọa độ chuẩn

Các hàm dạng tại nút.

$$N_1 = P_0(\xi)P_0(\eta) , N_2 = P_1(\xi)P_0(\eta) \quad (4.50a)$$

$$N_3 = P_1(\xi)P_1(\eta) , N_4 = P_0(\xi)P_1(\eta) \quad (4.50b)$$

Các hàm dạng trên cạnh.

$$N_1^p = P_p(\xi)P_0(\eta) \quad (4.51a)$$

$$N_2^p = P_1(\xi)P_p(\eta) \quad (4.51b)$$

$$N_3^p = P_p(\xi)P_1(\eta) \quad (4.51c)$$

$$N_4^p = P_0(\xi)P_p(\eta) \quad (4.51d)$$

Các hàm dạng trên mặt.

Có $(p - 2)(p - 3)/2$ trên mặt khi bậc xấp xỉ $p \geq 4$.

$$\text{Bậc 4: } N_{(1)}^4 = P_2(\xi)P_2(\eta), \quad (4.52a)$$

$$\text{Bậc 5: } N_{(1)}^5 = P_2(\xi)P_3(\eta), \quad N_{(2)}^5 = P_3(\xi)P_2(\eta) \quad (4.52b)$$

$$N_{(m)}^p = P_i(\xi)P_j(\eta), \quad i, j = 2, 3, \dots, p-2, i+j = p \quad (4.52c)$$

Bảng 4.3. Số dofs trên phần tử tương ứng với bậc p cho phần tử tứ giác.

Bậc p	Dofs liên kết tại nút	Dofs liên kết trên cạnh	Dofs liên kết trên mặt	Tổng Dofs
1	4			4
2	4	4		8
3	4	8		12
4	4	12	1	17
5	4	16	3	23
6	4	20	6	30
7	4	24	10	38
8	4	28	15	47

e. Ánh xạ hình học với phương pháp hàm trộn:

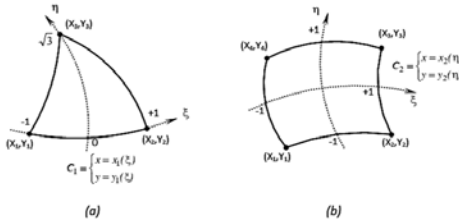
📌 Phần tử tam giác (*p-refinement*)

$$C_1 \equiv \begin{cases} x = x_1(\xi) \\ y = y_1(\xi) \end{cases}, C_2 \equiv \begin{cases} x = x_2(\xi, \eta) \\ y = y_2(\xi, \eta) \end{cases}, C_3 \equiv \begin{cases} x = x_3(\xi, \eta) \\ y = y_3(\xi, \eta) \end{cases} \quad (4.53)$$

Sử dụng phương pháp hàm trộn, phép ánh xạ hình học được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) = & L_1 X_1 + L_2 X_2 + L_3 X_3 \\ & + \left[\frac{4L_1 L_2}{(1-r^2)} \left(x_1(r) - \frac{1-r}{2} X_1 - \frac{1+r}{2} X_2 \right) \right]_{r=L_2-L_1} \\ & + \left[\frac{4L_2 L_3}{(1-r^2)} \left(x_2(r) - \frac{1-r}{2} X_2 - \frac{1+r}{2} X_3 \right) \right]_{r=L_3-L_2} + \left[\frac{4L_3 L_1}{(1-r^2)} \left(x_3(r) - \frac{1-r}{2} X_3 - \frac{1+r}{2} X_1 \right) \right]_{r=L_1-L_3} \end{aligned} \quad (4.54)$$

Tương tự cho $y(\xi, \eta)$.



Hình 4.6. Ánh xạ biên hình học.

📌 Phần tử tứ giác (*p-refinement*)

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) = & \frac{1}{2}(1-\eta)x_1(\xi) + \frac{1}{2}(1+\xi)x_2(\eta) + \frac{1}{2}(1+\eta)x_3(\xi) + \frac{1}{2}(1-\xi)x_4(\eta) \\ & - \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)X_1 - \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)X_2 \\ & - \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)X_3 - \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)X_4 \end{aligned} \quad (4.55)$$

Tương tự cho hàm nội suy $y(\xi, \eta)$.

f. Phép đạo hàm của các hàm nội suy:

Trường hợp bài toán 2 chiều .

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \equiv [J]^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.56)$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-T} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \equiv \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (4.57)$$

g. Tính toán ma trận độ cứng phần tử và tích phân Gauss:

- Trong hệ tọa độ thực:

$$[K]_e = \int_{\Omega_e} \{B\}^T [E] \{B\} d\Omega_e \quad (4.58)$$

- Trong hệ tọa độ chuẩn:

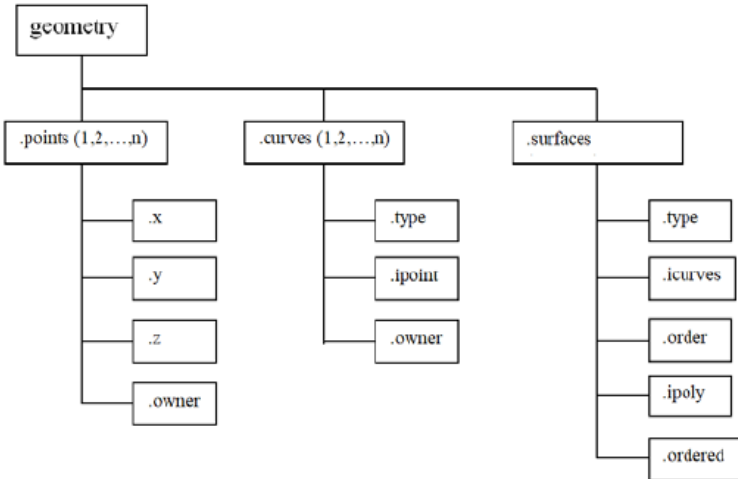
$$[K]_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] \det [J] d\xi d\eta \quad (4.59)$$

Sử dụng tích phân Gauss, công thức (4.59) có thể tính như sau.

$$[K]_e = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i w_i w_j \{ [B]^T [D] [B] \det [J] \} (\xi_i, \eta_j) \quad (4.60)$$

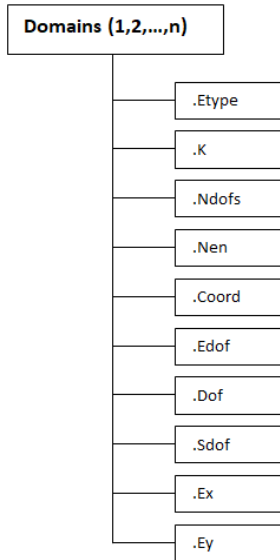
4.2.3. Cấu trúc dữ liệu và tự động phát sinh lưới

a. Miền hình học:



Hình 4.7. Sơ đồ tổ chức quản lý miền hình học

b. Cấu trúc dữ liệu của miền:



Hình 4.8. Sơ đồ tổ chức quản lý dữ liệu của miền

- c. Giải thuật phát sinh lưới:**
- d. Giải thuật tính toán, lắp ghép trên miền:**
- e. Giải thuật mã hóa bậc tự do của miền trong toàn kết cấu:**
- f. Giải thuật lắp ghép miền vào toàn kết cấu:**
- g. Giải thuật khai báo tải trọng tập trung trên nút và tải trọng phân bố trên cạnh:**
- h. Giải thuật áp đặt điều kiện biên trên nút và trên cạnh:**
- i. Giải thuật phát sinh p (bậc đa thức xấp xỉ):**
- j. Giải thuật khai báo tải trọng tập trung trên nút và tải trọng phân bố trên cạnh:**
- k. Giải thuật áp đặt điều kiện biên trên nút và trên cạnh:**
- l. Giải thuật giải hệ phương trình đại số tuyến tính:**

4.3. Kết quả và thảo luận

4.3.1. Sai số tương đối của năng lượng biến dạng và chỉ số độ tin cậy (Trình bày cụ thể trong mục 4.1)

Phương trình cân bằng (nghiệm mạnh):

$$Lu = f \Rightarrow Lu - f = 0; \quad u \in \Omega \quad (4.61)$$

Nguyên lý công ảo (nghiệm yếu):

$$\int_{\Omega} v(Lu - f)d\Omega = 0; \quad u, v \in \Omega \quad (4.62)$$

Điều kiện biên Dirichlet:

$$u = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_D \quad (4.63)$$

Tìm năng lượng $u \in V$ thỏa mãn phương trình (4.63):

$$B(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V \quad (4.64)$$

Năng lượng biến dạng:

$$U(u) = \frac{1}{2} B(u, u) \quad (4.65)$$

Chuẩn năng lượng:

$$\|u\|_{E(\Omega)} = \sqrt{B(u, u)} \quad (4.66)$$

Sai số e và sai số chuẩn năng lượng $\|e\|_{E(\Omega)}$ trong miền khảo sát:

$$e = u - u_h \quad (4.67)$$

$$\|e\|_{E(\Omega)} = \|u - u_h\|_{E(\Omega)} \quad (4.68)$$

Sai số chuẩn năng lượng:

$$\|e_h\|_{E(\Omega)} = \|u - u_h\|_{E(\Omega)} \leq \frac{k}{N^\beta} \quad (4.69)$$

Sử dụng sơ đồ ngoại suy Richardson, sai số có thể được viết dưới dạng năng lượng:

$$\|e_h\|_{E(\Omega)}^2 = 2 \|U - U_h\|_{E(\Omega)} = \frac{k^2}{N^{2\beta}} \quad (4.70)$$

Sai số tương đối của năng lượng biến dạng:

$$\eta_{FEM} (\%) = \sqrt{\frac{U - U_h}{U}} \times 100\% \quad (4.71)$$

$$\eta_{extra} (\%) = \sqrt{\frac{U_h - U_{h-1}}{U_h}} \times 100\% \quad (4.72)$$

Độ tin cậy:

✚ Chỉ số hiệu dụng:

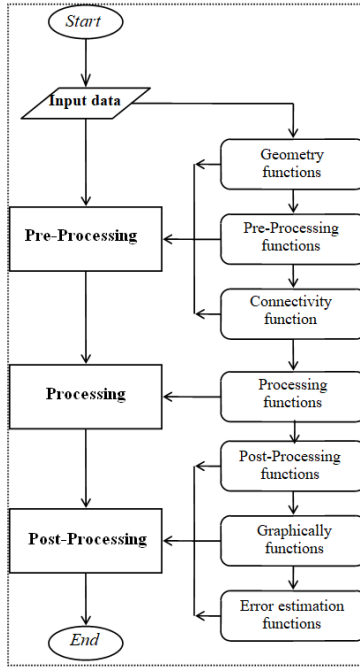
$$\theta = \frac{\eta_{extra}}{\eta_{FEM}} \quad (4.73)$$

✚ Chỉ số đều

$$SD = \left[\frac{1}{n} \sum_{e=1}^n (\theta_e - \bar{\theta})^2 \right]^{1/2} \quad (4.74)$$

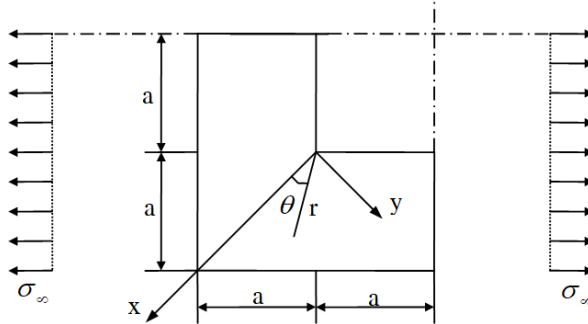
Trong đó: $\bar{\theta}$ là giá trị trung bình của θ

** Một kỹ thuật đánh giá tin cậy nếu: với $1 \leq \eta(\%) \leq 10$, $0.8 \leq \theta \leq 1.2$, lúc đó $SD \leq 0.2$



Hình 4.9. Cấu trúc chương trình

4.3.2. Ứng dụng 1: Bài toán lỗ vuông trong tấm vô hạn chịu kéo

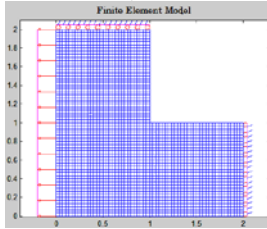


Hình 4.10. Tấm L - Một phần tư của tấm có lỗ vuông chịu kéo
 Năng lượng biến dạng chính xác:

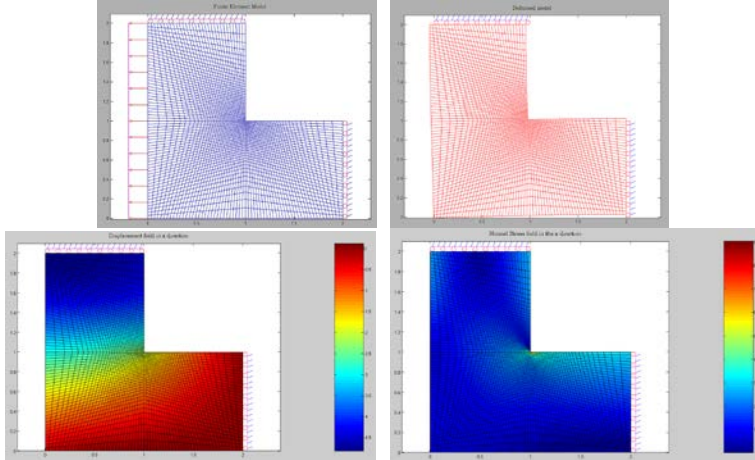
$$\frac{1}{2} \|u\|_{E(\Omega)}^2 = 4.15454423 \frac{\sigma_\infty^2 a^2}{E} \quad (4.75)$$

Thế các giá trị σ_∞ , a , E đã cho vào công thức (4.75), kết quả năng lượng biến dạng chính xác: $\frac{1}{2} \|u\|_{E(\Omega)}^2 = 2.077272115 \text{ (kJ)}$

Kết quả phân tích phần tử hữu hạn



Hình 4.11. Mô hình phần tử hữu hạn lưới đều (uniform mesh)



Hình 4.12. Kết quả phân tử hữu hạn grade mesh

Bảng 4.4. Kết quả sai số tương đối của h-refinement (uniform mesh) và h-refinement (grade mesh)

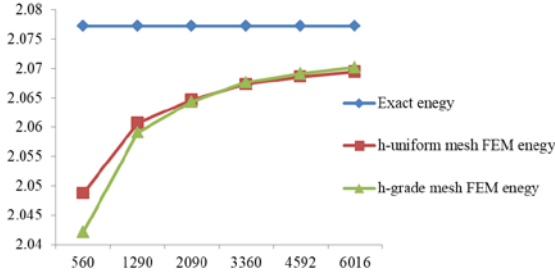
Mesh	Số phần tử	Dofs	h-refinement (uniform mesh)				h-refinement (grade mesh)			
			$\frac{1}{2} \ u\ _{E(\Omega)}^2$ FEM	Thời gian (s)	η_{FEM} (%)	$\tilde{\eta}_{extra}$ (%)	$\frac{1}{2} \ u\ _{E(\Omega)}^2$ FEM	Thời gian (s)	η_{FEM} (%)	$\tilde{\eta}_{extra}$ (%)
18x18x1	243	560	2.04877	0.755	2.850	8.128	2.04218	0.779	3.510	9.018
28x28x1	588	1290	2.06068	4.702	1.659	6.201	2.05910	4.771	1.817	6.490
36x36x1	972	2090	2.06462	18.933	1.265	5.415	2.06435	18.652	1.293	5.473
46x46x1	1587	3360	2.06727	75.811	1.000	4.814	2.06765	75.390	0.962	4.722
54x54x1	2187	4592	2.06856	194.197	0.871	4.493	2.06915	191.501	0.812	4.338
62x62x1	2883	6016	2.06945	439.790	0.782	4.257	2.07014	427.941	0.713	4.064

Bảng 4.5. Kết quả sai số tương đối của p-refinement (uniform mesh) và p-refinement (grade mesh)

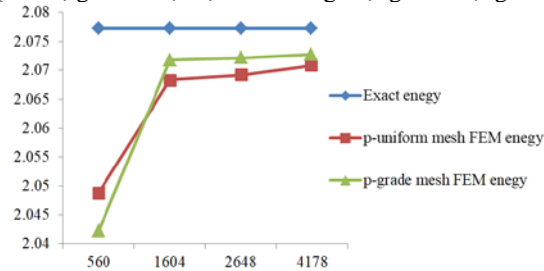
Mesh	Số phần tử	Dofs	p-refinement (uniform mesh)				p-refinement (grade mesh)			
			$\frac{1}{2} \ u\ _{E(\Omega)}^2$ FEM	Thời gian (s)	η_{FEM} (%)	$\tilde{\eta}_{extra}$ (%)	$\frac{1}{2} \ u\ _{E(\Omega)}^2$ FEM	Thời gian (s)	η_{FEM} (%)	$\tilde{\eta}_{extra}$ (%)
18x18x1	243	560	2.04877	0.755	2.850	8.128	2.04218	0.735	3.510	9.018
18x18x2	243	1604	2.06834	3.668	0.893	4.549	2.07179	3.596	0.548	3.564
18x18x3	243	2648	2.06915	10.055	0.812	4.338	2.07214	9.848	0.513	3.448
18x18x4	243	4178	2.07079	27.926	0.648	3.876	2.07273	27.917	0.454	3.243

Bảng 4.6. Kết quả sai số tương đối của h-p-refinement (uniform mesh) và h-p-refinement (grade mesh)

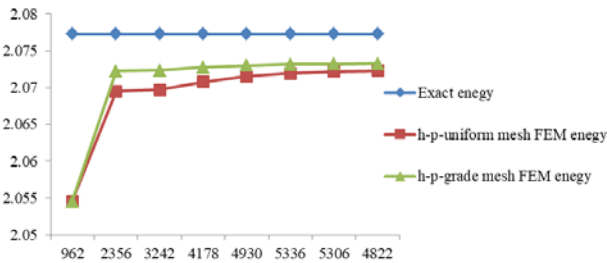
Mesh	Số phần tử	Dofs	h-p-refinement (uniform mesh)				h-p-refinement (grade mesh)			
			$\frac{1}{2} \ u\ _{E(\Omega)}^2$ FEM	Thời gian (s)	η_{FEM} (%)	$\tilde{\eta}_{extra}$ (%)	$\frac{1}{2} \ u\ _{E(\Omega)}^2$ FEM	Thời gian (s)	η_{FEM} (%)	$\tilde{\eta}_{extra}$ (%)
24x24x1	432	962	2.05455	2.211	2.272	7.257	2.05455	2.175	2.272	7.257
22x22x2	363	2356	2.06948	10.506	0.779	4.249	2.07224	10.331	0.503	3.413
20x20x3	300	3242	2.06968	18.376	0.759	4.194	2.07234	17.814	0.493	3.382
18x18x4	243	4178	2.07079	28.213	0.648	3.876	2.07273	28.046	0.454	3.243
16x16x5	192	4930	2.07152	36.201	0.575	3.650	2.07299	35.661	0.428	3.148
14x14x6	147	5336	2.07195	38.891	0.532	3.512	2.07314	38.259	0.413	3.093
12x12x7	108	5306	2.07218	33.953	0.509	3.434	2.07322	34.050	0.405	3.063
10x10x8	75	4822	2.07229	24.108	0.499	3.399	2.07325	23.797	0.402	3.053



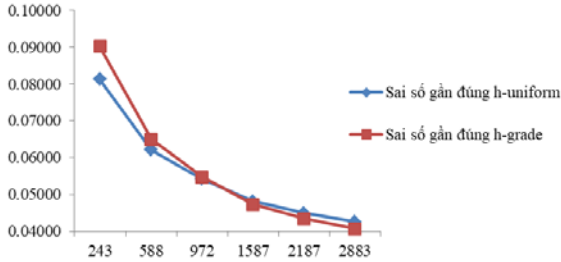
Hình 4.13. Quan hệ giữa số bậc tự do và năng lượng biến dạng của h-refinement



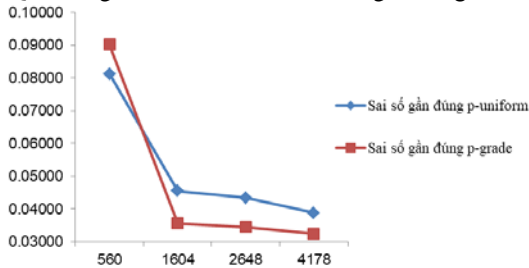
Hình 4.14. Quan hệ giữa số bậc tự do và năng lượng biến dạng của p-refinement



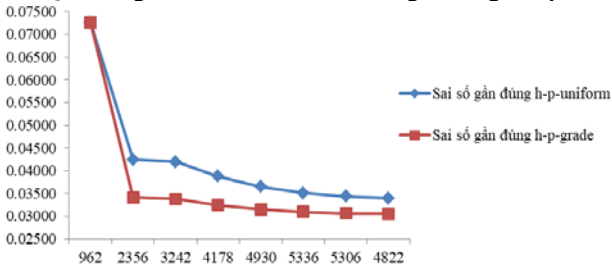
Hình 4.15. Quan hệ giữa số bậc tự do và năng lượng biến dạng của h-p-refinement



Hình 4.16. Quan hệ giữa số bậc tự do và sai số gần đúng của h-refinement



Hình 4.17. Quan hệ giữa số bậc tự do và sai số gần đúng của p-refinement



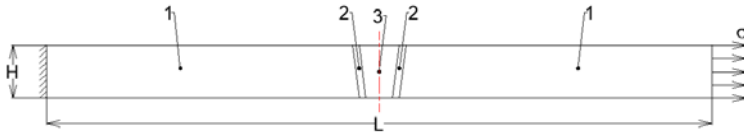
Hình 4.18. Quan hệ giữa số bậc tự do và sai số gần đúng của h-p-refinement

Nhận xét:

Thông qua Hình 4.16 – Hình 4.18, cho thấy tốc độ hội tụ của sai số gần đúng $\tilde{\eta}_{extra}$ rất nhanh và đạt độ ổn định cao trong trường hợp phương pháp phần tử hữu hạn với h-p-refinement. Giá trị của sai số gần đúng $\tilde{\eta}_{extra}$ trong trường hợp phương pháp phần tử hữu hạn với h-refinement tiệm cận đến 4% (Bảng 4.4), đạt giá trị lân cận 3% (Bảng 4.6) khi lưới được tinh chỉnh và tăng số bậc phần tử trong việc sử dụng kỹ thuật ngoại suy Richardson. Đây là công cụ được đánh giá hiệu quả, có độ tin cậy cao.

4.3.2. Ứng dụng 2: Bài toán môi hàn giáp môi thép AISI 1018 bằng laser chịu kéo

Tham khảo Hình 1 & 2 trong [11], nghiên cứu sinh đề xuất mô hình hàn laser chịu kéo thể hiện trong Hình 4.19:



(1) Vùng kim loại nền (2) Vùng ảnh hưởng nhiệt (3) Vùng hàn

Hình 4.19. Mô hình hàn laser chịu kéo

Vật liệu kim loại nền là thép AISI 1018 với mô-đun đàn hồi $E = 205$ GPa, và hệ số Poissons $\nu = 0.29$.

Thông số hàn: công suất laser 9.5 kW, tốc độ hàn 10-15 mm/s, nguồn nhiệt đầu vào 950 J/mm.

Kích thước trong hình 4.19 lần lượt: là $L = 100$ mm, $H = 8$ mm và $t = 1$ mm.

Độ bền kéo của mỗi hàn laser sau khi kiểm tra: $\sigma = 562$ MPa.

Thể tích $V = L \times H \times t = 800$ mm³

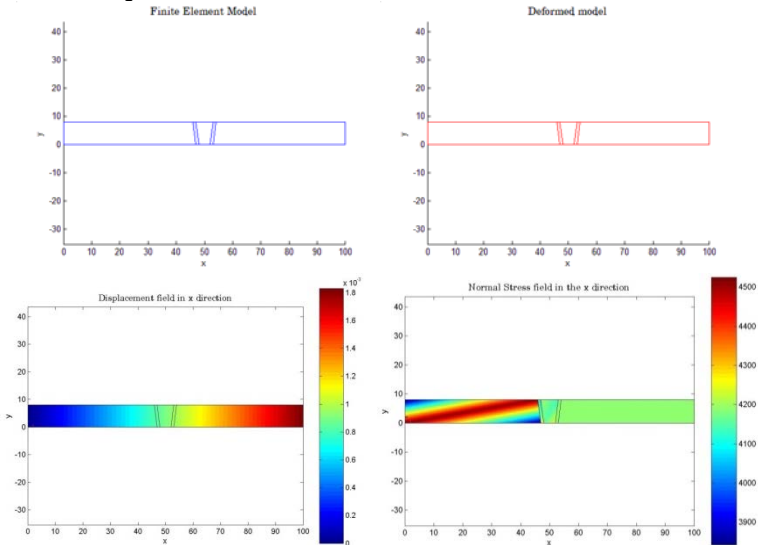
Năng lượng chính xác U tính theo công thức:

$$U = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 V}{E} \quad (4.76)$$

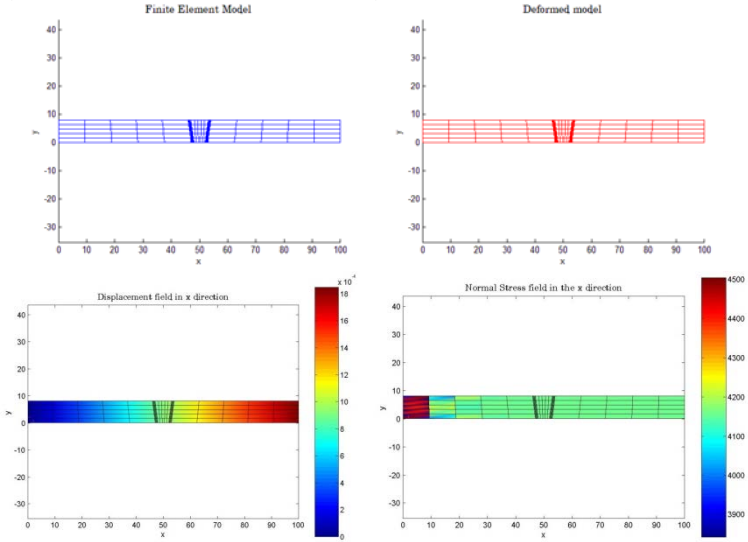
⇒ Giá trị của năng lượng chính xác là $U = 0.616281$ kJ

Phân tích phần tử hữu hạn được thực hiện trong trường hợp biến dạng phẳng.

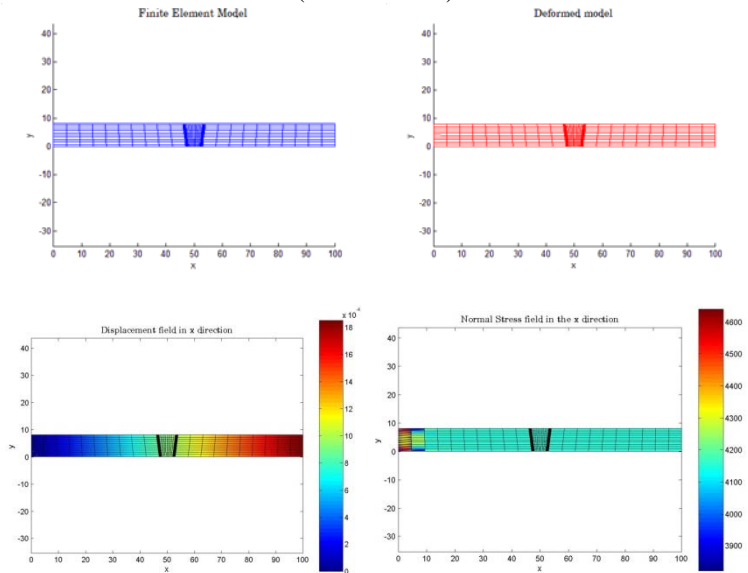
a. Kết quả h- refinement



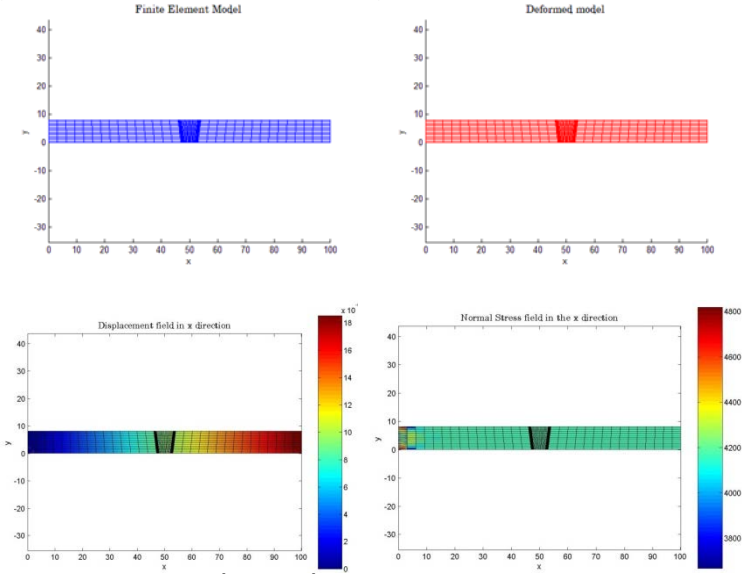
Hình 4.20. Mô hình và kết quả phân tử hữu hạn lưới 1x1x1 của h- refinement (uniform mesh)



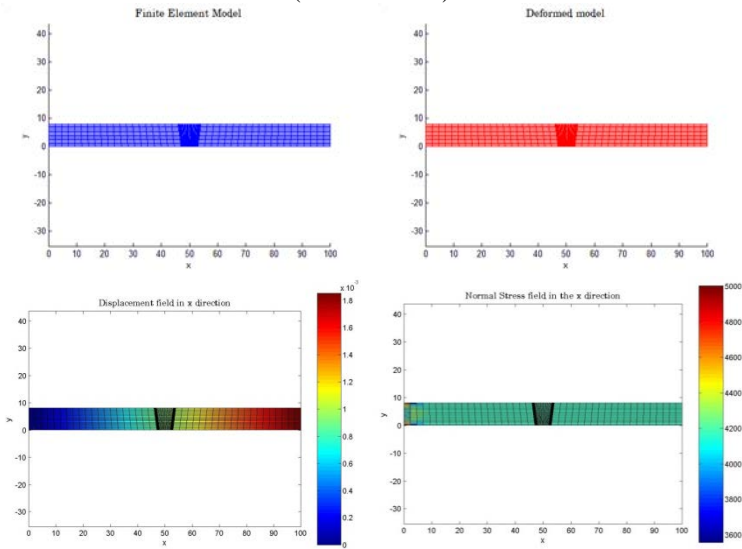
Hình 4.21. Mô hình và kết quả phân tử hữu hạn lưới $5 \times 5 \times 1$ của h- refinement (uniform mesh)



Hình 4.22. Mô hình và kết quả phân tử hữu hạn lưới $10 \times 10 \times 1$ của h- refinement (uniform mesh)



Hình 4.23. Mô hình và kết quả phân tử hữu hạn lưới $15 \times 15 \times 1$ của h- refinement (uniform mesh)

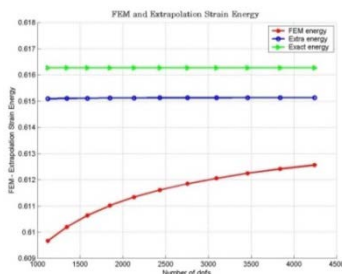


Hình 4.24. Mô hình và kết quả phân tử hữu hạn lưới $20 \times 20 \times 1$ của h- refinement (uniform mesh)

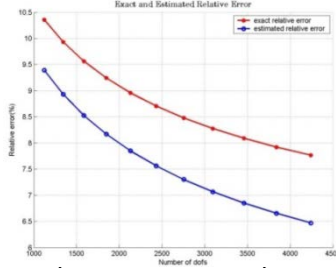
Bảng 4.7. Kết quả sai số tương đối, chỉ số hiệu dụng, chỉ số đều của h-refinement (uniform mesh)

Lưới	Số phần tử	Dofs	Năng lượng biến dạng FEM (kJ)	Năng lượng biến dạng EXTRA (kJ)	CPU time (s)
10×10	500	1122	0.614324438	0.6151587149	4.311
11×11	605	1344	0.614415158	0.6151357316	6.466
12×12	720	1586	0.614489235	0.6151203606	10.007
13×13	845	1848	0.614550606	0.6151100296	15.431
14×14	980	2130	0.614602102	0.6151028451	23.057
15×15	1125	2432	0.614645795	0.6150978253	33.682
16×16	1280	2754	0.614683239	0.6150942646	49.702
17×17	1445	3096	0.614715611	0.6150917687	66.657
18×18	1620	3458	0.614743821	0.6150899289	92.058
19×19	1805	3840	0.614768580	0.6150885422	122.959
20×20	2000	4242	0.614790452	0.6150875415	166.091

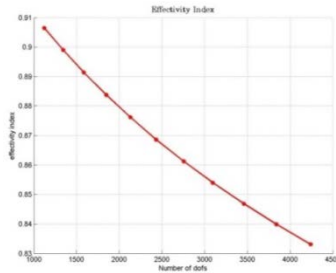
Dofs	η_{FEM} (%)	η_{extra} (%)	θ	$\bar{\theta}$	SD
1122	5.634525995	3.682658519	0.653588	0.535667	0.019528
1344	5.502347809	3.422580574	0.622022		
1586	5.392015867	3.203154843	0.594055		
1848	5.298867385	3.015739461	0.569129		
2130	5.219426836	2.853210237	0.546652		
2432	5.151060698	2.710887540	0.526278		
2754	5.091743887	2.585019044	0.507688		
3096	5.039898373	2.472948899	0.490674		
3458	4.994279531	2.372119294	0.474967		
3840	4.953894817	2.280763997	0.460398		
4242	4.917944624	2.197735303	0.446881		



Hình 4.25. Quan hệ giữa số bậc tự do và năng lượng biến dạng của h-refinement



Hình 4.26. Quan hệ giữa số bậc tự do và sai số tương đối của h- refinement

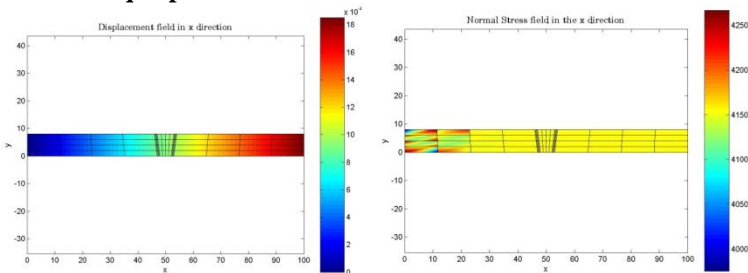


Hình 4.27. Quan hệ giữa số bậc tự do và chỉ số hiệu dụng của h- refinement

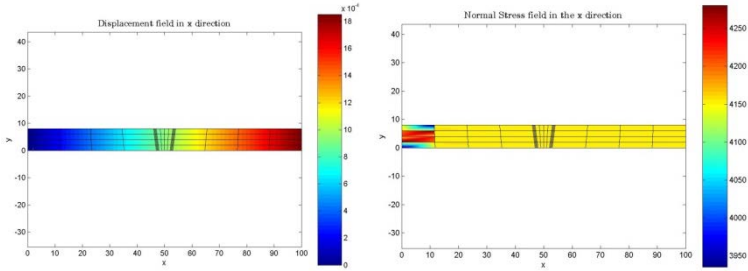
Nhận xét: Tương ứng với kích thước lưới, số phần tử, số bậc tự do, Bảng 4.7 cho thấy kết quả sai số tương đối của năng lượng biến dạng là $5.634525995 \geq \eta_{h-FEM} (\%) \geq 4.917944624$, $3.682658519 \geq \eta_{h-extra} (\%) \geq 2.197735303$, chỉ số hiệu dụng θ trong khoảng $(0.653 - 0.446)$, $\bar{\theta}_{h-refinement} = 0.535667$ và chỉ số điều $SD_{h-refinement} = 0.019528$. Kết quả này là rất khả thi, **thỏa mãn** $1 \leq \eta (\%) \leq 10$, $\theta \leq 1.2$, $SD \leq 0.2$).

Hình 4.27 cho thấy tốc độ hội tụ của trường hợp h- refinement là rất tốt.

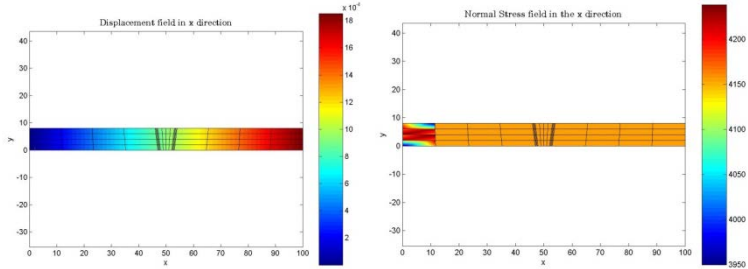
b. Kết quả p- refinement



Hình 4.28. Kết quả phần tử hữu hạn lưới 4x4x2 của p- refinement (uniform mesh)



Hình 4.29. Kết quả phần tử hữu hạn lưới 4x4x5 của p- refinement (uniform mesh)

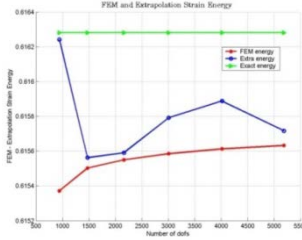


Hình 4.30. Kết quả phần tử hữu hạn lưới 4x4x8 của p- refinement (uniform mesh)

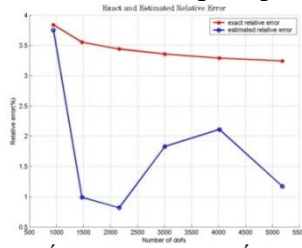
Bảng 4.8. Kết quả sai số tương đối, chỉ số hiệu dụng, chỉ số đều của p- refinement (uniform mesh)

Bậc đa thức	Số phần tử	Dofs	Năng lượng biến dạng FEM (kJ)	Năng lượng biến dạng EXTRA (kJ)	CPU time (s)
3	80	946	0.6153716271	0.6162412117	1.338
4		1474	0.6155020466	0.6155621713	2.509
5		2162	0.6155502623	0.6155911812	5.415
6		3010	0.6155853998	0.6157916617	11.768
7		4018	0.6156130668	0.6158877709	24.952
8		5186	0.6156326251	0.6157169343	49.870

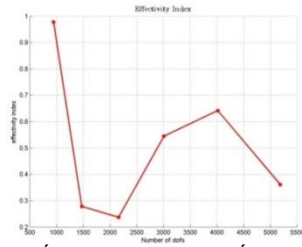
Dofs	η_{FEM} (%)	η_{extra} (%)	θ	$\bar{\theta}$	SD
946	3.841329993	3.756475407	0.977910103	0.506616	0.103834
1474	3.555218998	0.988304002	0.277986814		
2162	3.443430762	0.815296901	0.23676878		
3010	3.359622269	1.830174929	0.544756161		
4018	3.292131168	2.111941071	0.641511824		
5186	3.243573294	1.170165056	0.360764179		



Hình 4.31. Quan hệ giữa số bậc tự do và năng lượng biến dạng của p- refinement



Hình 4.32. Quan hệ giữa số bậc tự do và sai số tương đối của p- refinement



Hình 4.33. Quan hệ giữa số bậc tự do và chỉ số hiệu dụng của p- refinement

Nhận xét: Tương ứng với kích thước lưới, số phần tử, số bậc tự do, Bảng 4.8 cho thấy kết quả sai số tương đối của năng lượng biến dạng là $3.841329993 \geq \eta_{p-FEM} (\%) \geq 3.243573294$, $3.756475407 \geq \eta_{p-extra} (\%) \geq 0.815296901$, chỉ số hiệu dụng θ trong khoảng $(0.9773 - 0.236)$, $\bar{\theta}_{p-refinement} = 0.506616$ và chỉ số đều $SD_{p-refinement} = 0.103834$. Kết quả này là rất khả thi, **thỏa mãn** $1 \leq \eta (\%) \leq 10$, $\theta \leq 1.2$, $SD \leq 0.2$ ([94])

Từ Hình 4.27 và Hình 4.33: Mặc dù đường cong hội tụ của h-refinement mịn hơn, nhưng p- refinement cho thấy tốc độ hội tụ nhanh hơn nhiều với số lượng phần tử, bậc tự do ít hơn và chi phí tính toán thấp hơn.

Chương 5

KẾT LUẬN VÀ HƯỚNG PHÁT TRIỂN

Kết quả đề tài luận án là cơ sở để phát triển các bài toán phức tạp hơn, thậm chí cả bài toán 3D, cũng như áp dụng có các vật liệu khác nhau. Đồng thời, luận án cũng góp phần rút ngắn khoảng cách giữa mô phỏng và thực nghiệm; nhằm tiết kiệm vật liệu, công sức, thời gian; đem lại hiệu quả, năng suất cao trong tiến hành thí nghiệm và thực tế sản xuất. Cụ thể như sau:

➤ Phương pháp tuần tự (sequential method) được sử dụng để xác định ngược giá trị hệ số hấp thụ và kích thước mỗi hàn điểm bằng laser. Hai ứng dụng với giá trị hệ số hấp thụ là hằng số và hệ số hấp thụ là hàm số mũ theo thời gian gia nhiệt được thực hiện, cho thấy việc **xác định ngược hệ số này bằng phương pháp đề xuất đạt sai số nhỏ hơn 1.5%**. Đồng thời, **giá trị kích thước mỗi hàn: chiều rộng và chiều sâu mỗi hàn đạt sai số lần lượt là nhỏ hơn 0.3% và 0.5 % so với giá trị mong muốn**.

Tuy nhiên, thông tin nhiệt độ của cảm biến được trích xuất từ bài toán thuận khi hệ số hấp thụ được giả định biết trước và sai số đo lường cũng được đưa vào bằng việc sử dụng các công thức lý thuyết về xác suất. **Hướng phát triển: tiến hành thực nghiệm nhằm đo đạt trường nhiệt độ thực tế và kiểm nghiệm kết quả tính toán mô phỏng để chứng minh cho bài toán cả về lý thuyết và thực tiễn**

➤ Thuật toán tiến hóa vi sai cải tiến (MDE – Modified Differential Evolution), thuật toán di truyền (GA – Genetic Algorithm) và thuật toán JAYA được sử dụng để thực hiện **tối ưu hóa ngược thông số đầu vào của mỗi hàn laser cho thép không gỉ AISI 416 và AISI 440FSe nhằm đạt được kích thước mỗi hàn (kích thước mỗi hàn được cài đặt trước):** bề rộng mỗi hàn - Weld Zone Width ‘WZW_{ref}’ (μm) và độ ngấu mỗi hàn - Weld Penetration Depth ‘WPD_{ref}’ (μm). Kết quả tối ưu các tham số đầu vào: công suất laser - Laser Power ‘LP’ (W), tốc độ hàn - Welding Speed ‘WS’ (m/min), và đường kính sợi quang - Fiber Diameter ‘FD’ (μm) của thuật toán GA với trọng số $\lambda = 0.1$ được so sánh với với kết quả thực nghiệm đo đạt bởi Khan [31] với sai số tương ứng là 1,89%, 4,80% và 2,92%. Bên cạnh đó, luận án cũng trình bày so sánh kết quả tối ưu giữa ba giải thuật ngẫu nhiên nêu trên: Thuật toán MDE có chất lượng và hiệu quả vượt trội so với các thuật toán JAYA và GA. Kết quả tối ưu của thuật toán MDE tiếp

tục được so sánh với với kết quả thực nghiệm đo đạt bởi Khan [31] với sai số dưới 10%.

Bên cạnh đó, giá trị của trọng số λ trong hệ phương trình (3.4) được chọn ngẫu nhiên và thay đổi trị số bằng tay. **Hướng phát triển:** thực hiện tối ưu hóa đa mục tiêu các thông số đầu vào và trọng số λ ; sử dụng thuật toán tiến hóa vi sai cải tiến (MDE – Modified Differential Evolution) tối ưu bộ trọng số của mô hình mạng nơ-rôn nhân tạo (Artificial neural networks – ANN) để nhận dạng thông số đầu vào nhằm kiểm soát kích thước mỗi hàn cần đạt.

➤ Giải thuật tự động phát sinh lưới và tự động tăng bậc đa thức xấp xỉ được thực hiện giúp cho công việc tính toán linh hoạt và đa dạng. Phương pháp phân tử hữu hạn với h- refinement và p-refinement được đề xuất trong luận án này. Kết quả giá trị sai số chuẩn năng lượng biến dạng $\bar{\eta}_{extra}$ cho bài toán lỗ vuông trong tấm vô hạn chịu kéo bằng phương pháp phân tử hữu hạn với h- p- refinement đạt giá trị lân cận 3%. Đồng thời, việc **đánh giá độ tin cậy phương pháp phân tử hữu hạn với h- refinement và p-refinement cho mỗi hàn giáp mối thép AISI 1018 bằng laser** đã đem lại kết quả rất khả quan. Số lượng lưới được khảo sát cho h- và p- refinement lần lượt là 11 (bậc đa thức $p = 1$) và 6 (bậc đa thức $p = 3 \div 8$). Kết quả giá trị sai số tương đối nằm trong phạm vi cho phép, dưới 10%. Ngoài ra, với kỹ thuật ngoại suy Richardson đã đạt được giá trị rất khả thi: sai số tương đối $\eta_{extra}^{max} (\%) = 3.756475407$ & $\eta_{extra}^{min} (\%) = 0.815296901$, chỉ số hiệu dụng $\bar{\theta}_{h-refinement} = 0.535667$ & $\bar{\theta}_{p-refinement} = 0.506616$ và chỉ số điều $SD_{h-refinement} = 0.019528$ & $SD_{p-refinement} = 0.103834$, thỏa mãn: $1 \leq \eta (\%) \leq 10$, $\theta \leq 1.2$, $SD \leq 0.2$ [94].

Hướng phát triển: áp dụng tích hợp h- và p- refinement, phân tích ngược bài toán nhằm lựa chọn phù hợp loại vật liệu, giá trị tải trọng cho mỗi hàn nêu trên nhằm tạo ra kết cấu nhỏ gọn, và đồng thời mở rộng cho một số bài toán ba chiều trong thực tế.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] S. Katayama, *Handbook of Laser Welding Technologies*, Woodhead Publishing, 2013. (Hardcover ISBN: 9780857092649; eBook ISBN: 9780857098771)
- [2] R.C. Crafer, P.J. Oakley, *Laser Processing in Manufacturing*, Springer Netherlands, 1993 (Hardcover ISBN 978-94-011-1570-4)
- [3] E.K.-A. Jr., *Principles of laser materials processing*, Wiley, 2009 (Hardcover ISBN 10: 0470177985 ISBN 13: 9780470177983)
- [4] W.M. Steen, J. Mazumder, *Laser Material Processing*, Springer, 2010. (<https://doi.org/10.1007/978-1-84996-062-5>)
- [5] Juang SC, Tarn YS (2002) Process parameter selection for optimizing the weld pool geometry in the tungsten inert gas welding of stainless steel. *J Mater Process Technol* 122:3337. ([http://dx.doi.org/10.1016/S0924-0136\(02\)00021-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0924-0136(02)00021-3))
- [6] Information on <https://www.open.edu/openlearn/science-maths-technology/engineering-technology/manupedia/laser-beam-welding>
- [7] Information on <https://www.eurobots.net/laser-welding-and-cutting-robots-subc-13-en.html>
- [8] Information on <https://www.emag.com/machines/laser-welding-machines/elc-250-duo.html>
- [9] Information on <https://interestingengineering.com/laser-welding-types-advantages-and-applications>
- [10] Katayama, S. (2010). Understanding and improving process control in pulsed and continuous wave laser welding. *Advances in Laser Materials Processing*, 181–210. doi:10.1533/9781845699819.3.181
- [11] Carrizalez-Vazquez, M., Alvarez-Vera, M., Hernández-Rodríguez, A., Orona-Hinojos, J., Sandoval-Vázquez, G., & Acevedo-Dávila, J., Effect of Laser Welding on the Mechanical Properties AISI 1018 Steel, *MRS Advances*, 2(64), 4031-4039, 2017 (<https://doi.org/10.1557/adv.2017.599>)
- [12] D. Rosenthal, Mathematical theory of heat distribution during welding and cutting, *Welding journal*, 20(5) (1941) 220s-234s.
- [13] V. Pavelic, R. Tanbakuchi, O. Uyehara, P. Myers, Experimental and computed temperature histories in gas tungsten-arc welding of thin plates, *WELD J*, 48(7) (1969) 295
- [14] E. Friedman, Thermomechanical Analysis of the Welding Process Using the Finite Element Method, *Journal of Pressure Vessel Technology*, 97(3) (1975) 206-213
- [15] J. Goldak, A. Chakravarti, M. Bibby, A new finite element model for welding heat sources, *MTB*, 15(2) (1984) 299-305
- [16] J. Goldak, M. Bibby, J. Moore, R. House, B. Patel, Computer modeling of heat flow in welds, *MTB*, 17(3) (1986) 587-600
- [17] K.R. Balasubramanian, N. Siva Shanmugam, G. Buvanashakaran, K. Sankaranarayananasamy, Numerical and Experimental Investigation of

- Laser Beam Welding of AISI 304 Stainless Steel Sheet, *Advances in Production Engineering & Management*, 3(2) (2008) 93-105.
- [18] N. Siva Shanmugam, G. Buvanashakaran, K. Sankaranarayanan, Some studies on weld bead geometries for laser spot welding process using finite element analysis, *Materials & Design*, 34(0) (2012) 412-426.
- [19] N. Yadaiah, S. Bag, Development of egg-configuration heat source model in numerical simulation of autogenous fusion welding process, *International Journal of Thermal Sciences*, 86(0) (2014) 125-138.
- [20] P. Dinesh Babu, G. Buvanashakaran, K.R. Balasubramanian, Experimental investigation of laser transformation hardening of low alloy steel using response surface methodology, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 67(5-8) (2013) 1883-1897.
- [21] El-Batahy, Abdel-Monem, Effect of laser welding parameters on fusion zone shape and solidification structure of austenitic stainless steels, *Mater Lett*, 32(2-3) (1997) 155-163.
- [22] K.Y. Benyounis, A.G. Olabi, M.S.J. Hashmi, Effect of laser welding parameters on the heat input and weld-bead profile, *Journal of Materials Processing Technology*, 164-165 (2005) 978-985.
- [23] J.V. Beck, B. Blackwell, C.R. St.Clair, *Inverse heat conduction ill-posed problems*, (1985).
- [24] M.N. Ozisik, *Inverse heat transfer: fundamentals and applications*, (2000) (ISBN 9781560328384)
- [25] Y.S. Sun, C.I. Weng, T.-C. Chen, W.-L. Li, Estimation of Surface Absorptivity and Surface Temperature in Laser Surface Hardening Process, *Japanese Journal of Applied Physics*, 35(6R) (1996) 3658.
- [26] J.-T. Wang, C.I. Weng, J.G. Chang, C.C. Hwang, The influence of temperature and surface conditions on surface absorptivity in laser surface treatment, *J Appl Phys*, 87(7) (2000) 3245-3253.
- [27] H.T. Chen, X.Y. Wu, Estimation of surface absorptivity in laser surface heating process with experimental data, *Journal of Physics D: Applied Physics*, 39(6) (2006) 1141.
- [28] Q. Nguyen, C.-y. Yang, A modified Newton-Raphson method to estimate the temperature-dependent absorption coefficient in laser welding process, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 102 (2016) 1222-1229.
- [29] Benyounis et al. Multi-response optimization of CO2 laser-welding process of austenitic stainless steel. *Optics and Laser Technology*, Vol. 40, pp. 76-87, 2008. (<http://dx.doi.org/10.1016/j.optlastec.2007.03.009>)
- [30] Anawa et al. Optimization of tensile strength of ferritic/austenitic laser-welded Components. *Optics and Laser in Engineering*, Vol. 46, pp. 571-577, 2008. (<http://dx.doi.org/10.1016/j.optlaseng.2008.04.014>)
- [31] Khan et al. Experimental design approach to the process parameter

- optimization for laser welding of martensitic stainless steels in a constrained overlap configuration. *Optics and Laser Technology*, Vol. 43, pp. 158-172, 2011. (<http://dx.doi.org/10.1016/j.optlastec.2010.06.006>)
- [32] Yangyang Zhao et al. Optimization of laser welding thin-gage galvanized steel via response surface methodology. *Optics and Laser in Engineering*, Vol. 50, pp. 1267-1273, 2012. (<http://dx.doi.org/10.1016/j.optlaseng.2012.03.010>)
- [33] Reisgen et al. Optimization of laser welding of DP/TRIP steel sheets using statistical approach. *Optics and laser technology*, Vol. 44, pp. 255-262, 2012. (<https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2011.06.028>)
- [34] Mingjun Zhang et al. Optimization of deep penetration laser welding of thick stainless steel with a 10 kW fiber laser. *Materials and Design*, Vol. 53, pp. 568-576, 2014. (<https://doi.org/10.1016/j.matdes.2013.06.066>)
- [35] Yuewei Ai et al. A defect-responsive optimization method for the fiber laser butt welding of dissimilar materials. *Materials and Design*, Vol. 90, pp. 669-681, 2016. (<https://doi.org/10.1016/j.matdes.2015.10.160>)
- [36] Ahn et al. Parametric optimization and microstructural analysis on high power Yb-fibre laser welding of Ti6Al4V. *Optics and Lasers in Engineering*, Vol.86, pp. 156-171, 2016. (<http://dx.doi.org/10.1016/j.optlaseng.2016.06.002>)
- [37] Zhongmei Gao et al. Parameters optimization of hybrid fiber laser-arc butt welding on 316L stainless steel using Kriging model and GA. *Optics and laser technology*, Vol. 83, pp. 153-162, 2016. (<https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2016.04.001>)
- [38] Shanmugarajan et al. Optimisation of laser welding parameters for welding of P92 material using Taguchi based grey relational analysis. *Defence Tech*, Vol. 12, pp. 343-350, 2016. (<https://doi.org/10.1016/j.dt.2016.04.001>)
- [39] R. Venkata Rao, Dhiraj P. Rai, Joze Balic, A multi-objective algorithm for optimization of modern machining processes, *Engineering Applications of Artificial Intelligence* 61 (2017) 103125. (<https://doi.org/10.1016/j.engappai.2017.03.001>)
- [40] K. Vijayan, P. Ranjithkumar and B. Shanmugarajan, Comparison of Response Surface Methodology and Genetic Algorithm in Parameter Optimization of Welding Process, *Appl. Math. Inf. Sci.* 12, No. 1, 239-248 (2018). (<http://dx.doi.org/10.18576/amis/120124>)
- [41] Yang Yang, Longchao Cao, Qi Zhou, Chaochao Wang, Qing Wu, Ping Jiang, Multi-objective process parameters optimization of Laser-magnetic hybrid welding combining Kriging and NSGA-II, *Robotics and Computer Integrated Manufacturing* 49 (2018) 253262. (<https://doi.org/10.1016/j.rcim.2017.07.0033>)
- [42] O.C. Zeinkiewicz, *The finite element method*, 4rd ed., McGraw-Hill,

- New York, 2000. (ISBN 0070841748, 0070841756)
- [43] I.Babuska, O.C. Zeinkiewicz, J.Gago, E.R.de.A.Oliveira, *Accuracy estimates and adaptive refinements in finite element computations*, John Wiley & Sons, 1986.
- [44] A.Promwungkwa, *Data structure and error estimation for an adaptive p-refinement finite element method in 2-D and 3-D solids*, PhD thesis, Placksburg, Virginia, April - 1998.
- [45] L. Demkowicz, Ph. Devloo, J.T. Oden, On an h-type mesh-refinement strategy based on minimization of interpolation errors, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 53, Issue 1, Pages 67-89, ISSN 0045-7825, 1985. ([https://doi.org/10.1016/0045-7825\(85\)90076-3](https://doi.org/10.1016/0045-7825(85)90076-3))
- [46] I. Babuška, B.Q. Guo, The h, p and h-p version of the finite element method; basis theory and applications, *Advances in Engineering Software*, Volume 15, Issues 3-4, Pages 159-174, ISSN 0965-9978, 1992. ([https://doi.org/10.1016/0965-9978\(92\)90097-Y](https://doi.org/10.1016/0965-9978(92)90097-Y))
- [47] Andersson, B. , Falk, U. , Babuška, I. and Von Petersdorff, T., Reliable stress and fracture mechanics analysis of complex components using a h-p version of FEM. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 38: 2135-2163, 1995 (<https://doi.org/10.1002/nme.1620381302>)
- [48] Babuška, I., Petersdorff, v.T. & Andersson, B., *Computation of the vertex singularity factors for laplace equation in 3 dimensions*, Tech. Note BN-1140, Institute for Physical Science and Technology, University of Maryland, USA, 1992.
- [49] W Rachowicz, An anisotropic h-type mesh-refinement strategy, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 109, Issues 1-2, Pages 169-181, ISSN 0045-7825, 1993 ([https://doi.org/10.1016/0045-7825\(93\)90231-L](https://doi.org/10.1016/0045-7825(93)90231-L))
- [50] Michael R. Dörfel, Bert Jüttler, Bernd Simeon, *Adaptive isogeometric analysis by local h-refinement with T-splines*, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 199, Issues 5-8, Pages 264-275, ISSN 0045-7825, 2010 (<https://doi.org/10.1016/j.cma.2008.07.012>)
- [51] H. Zhao, D.R. White, T. DebRoy, Current issues and problems in laser welding of automotive aluminum alloys, *International Materials Reviews*, 44 (1999) 238-266.
- [52] T. DebRoy, S. David, Physical processes in fusion welding, *Review of Modern Physics*, 67(1) (1995) 85-112.
- [53] X. Na, Laser Welding, Sciyo 2010
- [54] D.W. Hahn, M.N. Özişik, *Heat Conduction*, 3 ed., John Wiley & Sons, Inc., 2012
- [55] D. Rosenthal, *The theory of moving sources of heat and its application to metal treatments*, in ASME, 1946.
- [56] N. Rykalkine, *Energy sources for welding*, *Revista de Soldadura*, 6(3)

- (1976) 125-140
- [57] G. Krutz, L. Segerlind, *Finite Element Analysis of Welded Structures, Welding Research Supplement*, 57 (1978) 211-216
- [58] B.M.R. Frewin, D.A. Scott, *Finite Element Model of Pulsed Laser Welding*, *Welding Research Supplement*, 78 (1999) 15s-22s
- [59] A. De, T. DebRoy, Improving reliability of heat and fluid flow calculation during conduction mode laser spot welding by multivariable optimisation, *Sci Technol Weld Joi*, 11(2) (2006) 143-153.
- [60] K. Hong, D.C. Weckman, A.B. Strong, W. Zheng, Modelling turbulent thermofluid flow in stationary gas tungsten arc weld pools, *Sci Technol Weld Joi*, 7(3) (2002) 125-136.
- [61] J.A. Goldak, M. Akhlaghi, *Computational welding mechanics*, Springer, 2005
- [62] B. Carnahan, H.A. Luther, J.O. Wilkes, *Applied Numerical Methods*, Wiley, New York, 1969.
- [63] A. De, S.K. Maiti, C.A. Walsh, H.K.D.H. Bhadeshia, Finite element simulation of laser spot welding, *Sci Technol Weld Joi*, 8(5) (2003) 377-384.
- [64] R.W. Lewis, P. Nithiarasu, K.N. Seetharamu, *Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow*, (2004).
- [65] D.K. Gartling, J.N. Reddy, *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics*, Third Edition, 3 ed., CRC Press, 2010.
- [66] H.-C. Huang, A.S. Usmani, *Finite Element Analysis for Heat Transfer: Theory and Software*, 1 ed., Springer-Verlag London, 1994.
- [67] R.W. Lewis, K. Ravindran, Finite element simulation of metal casting, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47(1-3) (2000) 29-59
- [68] S. Safdar, A.J. Pinkerton, L. Li, M.A. Sheikh, P.J. Withers, An anisotropic enhanced thermal conductivity approach for modelling laser melt pools for Ni-base super alloys, *Applied Mathematical Modelling*, 37(3) (2013) 1187-1195.
- [69] S. Bag, A. Trivedi, A. De, Development of a finite element based heat transfer model for conduction mode laser spot welding process using an adaptive volumetric heat source, *International Journal of Thermal Sciences*, 48(10) (2009) 1923-1931.
- [70] B. Sawaf, M.N. Ozisik, Y. Jarny, An inverse analysis to estimate linearly temperature dependent thermal conductivity components and heat capacity of an orthotropic medium, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 38(16) (1995) 3005-3010.
- [71] C.-H. Huang, C.-Y. Huang, An inverse problem in estimating simultaneously the effective thermal conductivity and volumetric heat capacity of biological tissue, *Applied Mathematical Modelling*, 31(9) (2007) 1785-1797.
- [72] F. Bobaru, S. Rachakonda, Boundary layer in shape optimization of

- convective fins using a meshfree approach, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60(7) (2004) 1215-1236.
- [73] C.-H. Huang, J.-H. Hsiao, A non-linear fin design problem in determining the optimum shape of spine and longitudinal fins, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 19(2) (2002) 111-124.
- [74] D.T.W. Lin, C.-N. Huang, C.-C. Chang, The Optimization of the Heat Removal on the LED Package, *Advanced Science Letters*, 4(6-7) (2011) 2301-2305.
- [75] C.-Y. Yang, Estimation of boundary conditions in nonlinear inverse heat conduction problems, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 17(3) (2003) 389-395.
- [76] D.T.W. Lin, C.-y. Yang, The estimation of the strength of the heat source in the heat conduction problems, *Applied Mathematical Modelling*, 31(12) (2007) 2696-2710.
- [77] M. Frank, P. Wolfe, An algorithm for quadratic programming, *Naval research logistics quarterly*, 3(1-2) (1956) 95-110.
- [78] R. Sabarikanth, K. Sankaranarayanan, N. Siva Shanmugam, G. Buvanashakaran, A study of laser welding modes with varying beam energy levels, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 223(5) (2009) 1141-1156.
- [79] IMSL, *Library Edition 10.0, User's Manual: Math Library Version 1.0*, Houston, Tex, (1987).
- [80] S.-M. Lin, C.o.-K. Chen, Y.-T. Yang, A modified sequential approach for solving inverse heat conduction problems, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47(12-13) (2004) 2669-2680.
- [81] S.-M. Lin, A sequential algorithm and error sensitivity analysis for the inverse heat conduction problems with multiple heat sources, *Applied Mathematical Modelling*, 35(6) (2011) 2607-2617.
- [82] Alam et al. A comparative study of metaheuristic optimization approaches for directional overcurrent relays coordination. *Electric Power Systems Research*, Vol. 128, pp. 39-52, 2015. (<http://dx.doi.org/10.1016/j.epsr.2015.06.018>)
- [83] R. V. Rao. Jaya, A Simple and New Optimization Algorithm for Solving Constrained and Unconstrained Optimization Problems. *International Journal of Industrial Engineering Computations 2016*; 7 (1): 1934. (<http://dx.doi.org/10.5267/j.ijiec.2015.8.004>)
- [84] R. Storn and K. Price. Differential Evolution-A simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces, *Journal Global Optimization*, vol. 11, pp. 341-359, 1997
- [85] N.N Son, C.V. Kien and H.P.H Anh. A novel adaptive feed-forward-PID controller of a SCARA parallel robot using pneumatic artificial muscle actuator based on neural network and modified differential

- evolution algorithm. *Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 96, pp. 65-80, 2017
- [86] Son, N.N., Anh, H.P.H. and Chau, T.D. Adaptive neural model optimized by modified differential evolution for identifying 5-DOF robot manipulator dynamic system, *Soft Computing*, Vol. 22, N. 3, pp. 979-988, 2018
- [87] Ciarlet, P. G. “*The Finite Element Method for Elliptic Problems*”, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [88] Wait, R. and Mitchell A. R., “*The Finite Element Analysis and Applications*”. John Wiley and Sons, Chichester, 1985.
- [89] Rank, E., Rucker, M., Duster, A., Broker, H. “The efficiency of the p-version finite element method in a distributed computing environment” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, 52:589-604.
- [90] Cugnon, F. et Beckers, P. “*Developpement d’un prototype de code-p*”, rapport SF-232 Decembre 1996, LTAS-ULG.
- [91] Adjerid, S., “*A posteriori Finite Element error estimation for second-order hyperbolic problems*”, March 7, 2002.
- [92] Moore, P. K. “*Interpolation Error-Based A Posteriori Error Estimation for Two-Point Boundary Value Problem and Parabolic Equations in One Space Dimension*”. January 11, 2001.
- [93] Babuska I., Zienkiewicz O. C., Gago J. and Oliveira A. “*Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations*”. John Wiley and Sons, Chichester, 1986.
- [94] Cugnon, F. “*Automatisation des calculs elements finis dans le cadre de la methode-p*”, these de doctorat, 2000, ULG.
- [95] Winterscheidt, D. and Surana, K. S. “p-refinement least-squares finite element formulation of Burgers’ equation”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36: 3629-3646. 1993.
- [96] Mandel, J., “An Iterative Solver for p-Refinement Finite Elements in Three Dimensions,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 116, pp. 175-183, 199
- [97] Szabo, B.A., “The p - and h - p Versions of the Finite Element Method in Solid Mechanics,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 80, pp. 185-195, 1990.
- [98] Zienkiewicz, O.C. and Craig, A., “Adaptive Refinement, Error Estimates, Multigrid Solution, and Hierarchic Finite ElementMethod Concepts,” in *Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations*, Babuska, I., Zienkiewicz, O.C., Gago, J., and Oliveira, E.R.de.A. (eds.), John Wiley & Sons, Inc., 1986.
- [99] Szabo, B.A., “Implementation of a Finite Element Software System with h and p Extension Capabilities,” *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 2, pp. 177-194, 1986.
- [100] Szabo, B.A., “Mesh Design for the p-Refinement of the Finite

- ElementMethod,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 55, pp. 181-197, 1986
- [101] Campton, S.D. and Jarvis, J.L., “An Investigation of the Implementation of the p-Refinement Finite Element Method,” *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 23, pp. 1-21, 1996
- [102] Wiberg, N.-E., Moller, P., and Samuelsson A., “Use of Trigonometric Functions for Hierarchical Improvement of Finite Element Solutions of 2D-static Elastic Problems,” in *Proc. 93 NUMETA 85*, Vol. 1, Middleton, J. and Pande, G.N. (eds.), Rotterdam, Netherlands, pp. 77-86, 1985.
- [103] Peano, A., Pasini, A., Riccioni, R., and Sardella, L., “Adaptive Approximations in Finite Element Structural Analysis,” *Computers & Structures*, Vol. 10, pp. 333-342, 1979.
- [104] Wiberg, N.-E. and Moller, P., “Formulation and Solution of Hierarchical Finite Element Equations,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 26, pp. 1213- 1233, 1988
- [105] Mandel, J., “Two-level Domain Decomposition Preconditioning for the p-Refinement Finite Element Method in Three Dimensions,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 29, pp. 1095-1108, 1990
- [106] Dunavant, D. A., “High degree efficient symmetrical Gaussian quadrature rules for the triangle. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 21:1129-1148, 1985.
- [107] Duster, A., Rank, E., “The p-refinement of finite element method compared to an adaptive h-refinement for the deformation theory of plasticity” *Comput. Methods Appl. Mech. in Engineering*, 190 (2001), 1925-1935.
- [108] Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L., *The Finite Element Method*, Fourth Edition, Vol. 1 Basic Formulation and Linear Programs, McGraw-Hill Book Company Europe, 1994
- [109] Information on http://amet-me.mnsu.edu/UserFilesShared/DATA_ACQUISITION/mts/MaterialData/MaterialData_6809-1018ColdDrawn.pdf
- [110] Information on <http://www.yandreou.com/wp-content/uploads/2014/08/AISI-1018-Mild-Low-Carbon-Steel-PDF.pdf>
- [111] Information on <http://www.engr.mun.ca/~katna/5931/STRAIN%20ENERGY-ImpactLoading.pdf>
- [112] Information on http://homepages.engineering.auckland.ac.nz/~pkel015/SolidMechanicsBooks/Part_I/BookSM_Part_I/08_Energy/08_Energy_02_Elastic_Strain_Energy.pdf

**MINISTRY OF EDUCATION AND TRAINING
HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF TECHNOLOGY AND EDUCATION**

NGUYỄN NHỰT PHI LONG

**CRITICAL STATE ANALYSIS AND RELIABILITY
EVALUATION FOR LASER WELD**

SUMMARY OF THE THESIS

MAJOR: ENGINEERING MECHANICS

MAJOR CODE: 9520101

**CÔNG TRÌNH ĐƯỢC HOÀN THÀNH TẠI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH**

Người hướng dẫn khoa học 1: PGS. TS. NGUYỄN HOÀI SƠN

(Ghi rõ họ, tên, chức danh khoa học, học vị và chữ ký)

Người hướng dẫn khoa học 2:

(Ghi rõ họ, tên, chức danh khoa học, học vị và chữ ký)

Luận án tiến sĩ được bảo vệ trước
HỘI ĐỒNG CHẤM BẢO VỆ LUẬN ÁN TIẾN SĨ
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT,
Ngày ... tháng ... năm

LIST OF PUBLICATIONS

[1] **Long Nguyen-Nhut-Phi**, Son Nguyen-Hoai*, Quan Nguyen, Phong Le-Thanh, Dai Mai-Duc, “*The reliable estimation for the laser weld by the h- and p- refinement of the Finite Element Method*”, **Journal** of Mechanics of Continua and Mathematical Sciences (JMCMs), ISSN (Print) 0973 – 8975, ISSN (Online) 2454 – 7190, General IF 2.6243, Vol. 15, 05/2020, 37-48 (DOI: <https://doi.org/10.26782/jmcm.2020.05.00003>)

<http://www.journalmcm.com/journal/the-reliable-estimation-for-the-laser-weld-by-the-h-and-p-refinement-of-the-finite-element-method/>

(Chapter 4)

[2] **Long Nguyen-Nhut-Phi**, Son Nguyen-Hoai*, Quan Nguyen, “*Determining of the laser heat conduction flux for three dimensional model by the sequential method*”, Vietnam **Journal** of Mechanics, ISSN 0866 – 7136, Vol. 42, No. 2 (2020), pp. 95 – 103 (DOI: <https://doi.org/10.15625/0866-7136/13753>)

<http://vjs.ac.vn/index.php/vjmech/article/view/13753>

(Chapter 2)

[3] **Long Nguyen-Nhut-Phi**, Son Nguyen-Hoai*, Quan Nguyen, “*Evaluate the strain energy error for the laser weld by the h-refinement of the Finite Element Method*”, IJIRAE::International **Journal** of Innovative Research in Advanced Engineering, ISSN 2349 – 2163, Vol. 6, 09/2019, 586-591 (DOI: 10.26562/IJIRAE.2019.SPAAE10081)

<https://www.ijirae.com/volumes/Vol6/iss09/01.SPAAE10081.pdf>

(Chapter 4)

[4] **Long Nguyen-Nhut-Phi**, Son Nguyen-Hoai*, “*Using the Genetic Algorithm to Optimize Laser Welding Parameters for Martensitic Stainless Steel*”, IRJCS:: International Research **Journal** of Computer Science, ISSN 2393 – 9842, Vol. 6, 09/2019, 676-680 (DOI: 10.26562/IRJCS.2019.SPCS10084)

<http://www.irjcs.com/volumes/Vol6/iss09/02.SPCS10084.pdf>

(Chapter 3)

[5] Quan, Nguyen; Son, Nguyen Hoai*; Tu, Chuong Thiet; **Long, Nguyen Nhut Phi**, “*A sequential method in estimating laser heat flux on three-dimensional conduction model*”, The 2nd **International Conference** on Advances in Computational Mechanics (ACOME2017), 08/2017, Phu Quoc, Viet Nam

<https://icacome.org/media/upload/editor/files/Abstract%20collection.pdf>

(Chapter 2)

[6] **Long, Nguyen Nhut Phi**; Quan, Nguyen; Son, Nguyen Hoai*; Tin, Le Trung, “*A sequential method in inverse estimation of the absorption coefficient for the spot laser welding process*”, The 9th **International Conference** on Computational Methods (ICCM2018), ISSN 2374 – 3948 (Online), Vol. 5, 08/2018, 681-692, Rome, Italy

<http://www.sci-en-tech.com/ICCM2018/PDFs/3464-11548-1-PB.pdf>

(Chapter 2)

[7] **Nguyen Nhut Phi Long**, Nguyen Hoai Son*, Pham Tan, “*Compare the optimization of laser welding for martensitic stainless steels by meta-heuristic optimization algorithms*”, The 3rd **Conference** on Civil Technology (CivilTech 3), ISBN 978-604-73-6847-1, 09/2019, HCMUTE, Ho Chi Minh, Viet Nam

(Chapter 3)

SUMMARY

The rapid development of laser technology in recent years has gradually replaced traditional technologies in general, and laser welding used in various industries has increased rapidly with unique features. The weld quality is characterized by weld geometry, which affects the determination of the mechanical properties of the weld. This is shown through the close relationship between the input parameters: material, welding thickness, laser power (laser power), welding speed (welding speed), fiber diameter (fiber diameter).) and output parameters: absorption coefficient, weld geometry characteristics: weld zone width, weld penetration depth (weld penetration). In the process of conducting experiments or in production practice, saving materials, effort and time are essential, requiring solutions to bring about efficiency and high productivity.

In this thesis, the Ph.D. student performed inverse determination of the absorption coefficient and weld size in spot laser welding by the sequential method: at each time step is solved by the modified Newton-Raphson method combined with the concept of future time used to establish the absorption coefficient value. The advantages of this method are that the functional form for the unknown absorption coefficient is not necessary to preselect and nonlinear least-square do not need in the algorithm. Two examples have been fulfilled to demonstrate the proposed method. The obtained results can be concluded that the proposed method is an accurate and stable method to inversely determine the absorption coefficient in the spot laser welding, and weld size (weld width and depth) are also very close to the desired value.

Secondly, the inverse optimization of input parameters (Laser Power 'LP' (W), Welding Speed 'WS' (m / min), and Fiber Diameter 'FD' (μm)) of laser weld for the AISI 416 and AISI 440FSe stainless steel to control the reached weld size (weld size is pre-set): Weld Zone Width 'WZW_{ref}' (μm) and Weld Penetration Depth 'WPD_{ref}' (μm) by the three meta-heuristic

optimization algorithms: the Modified Differential Evolution (MDE) algorithm, the Genetic Algorithm (GA) and the JAYA algorithm. The result of the GA algorithm with $\lambda = 0.1$ is compared with Khan's affirmation experiment result [25]: the error of the input parameters LP, WS, and FD, respectively, were 1.89 %, 4.80 %, and 2.92 %. Besides, the thesis also presents the effect of three different meta-heuristic algorithms: GA, JAYA and MDE. The MDE algorithm showed better efficiency and the result of this algorithm is compared with Khan's affirmation experiment result [25] with errors below 10%.

The representation of a continuous field of the problem domain with several piecewise fields results in discretization error in the finite element solution. This error can be reduced by two approaches: by decreasing the sizes of the elements: h- version, or by using higher-order approximation fields: p- version with the objective of obtaining solutions with prespecified accuracy and minimum cost of model preparation and computation. The value of the relative error of the strain energy $\tilde{\eta}_{extra}$ for an unstressed square hole in an infinite plate subjected to unidirectional tension by the h-p- refinement of the FEM reaches a neighboring value of 3%. At the same time, according to the Ph. D. student's knowledge, there have not been many studies evaluating the reliability of this method for welding in general and laser welding in particular. Another novelty of the thesis is that performing the reliability evaluation of the finite element method with h-refinement and p-refinement for AISI 1080 steel butt welded joints by the laser has brought very satisfactory results. Specifically, with h- refinement, the effective index θ is in the range (0.653 - 0.446), $\bar{\theta} = 0.535$ and the index $SD = 0.019$; and with p-refinement, θ is in the range (0.977 - 0.236), $\bar{\theta} = 0.506$ and $SD = 0.103$. The value of the result satisfies the requirement in [88]: $1 \leq \eta (\%) \leq 10, \leq 1.2, SD \leq 0.2$.

Chapter 1

INTRODUCTION

1.1. Review

The rapid development of laser technology in recent years has gradually replaced traditional technologies in general, and laser welding used in various industries has increased rapidly with unique features. The weld quality is characterized by weld geometry, which affects the determination of the mechanical properties of the weld. This is shown through the close relationship between the input parameters: material, welding thickness, laser power (laser power), welding speed (welding speed), fiber diameter (fiber diameter).) and output parameters: absorption coefficient, weld geometry characteristics: weld zone width, weld penetration depth (weld penetration). In the process of conducting experiments or in production practice, saving materials, effort and time are essential, requiring solutions to bring about efficiency and high productivity.

1.1.1. Determination of the absorption coefficient in laser welding by the sequential method

The absorbed energy of a laser beam known as laser heat flux is an important parameter in laser processing such as laser cladding, laser surface hardening, and laser welding. However, the direct measurement of this parameter during the process is difficult. As a result, many researchers used the inverse method to determine this parameter. For instance, Wang et al. calculated this parameter on the surface. His work used the conjugate gradient method (CGM) in the surface hardening process by the laser to determine this parameter inversely. Chen and Xu applied Laplace transform to the governing differential equation, boundary conditions, and initial condition to evaluate absorption in the heating process for surface by laser. Yang et al. applied CGM to estimate the absorbed energy of the laser beam and depth of the melt zone simultaneously. Sun et al. used the method of direct sensitivity coefficient for the determining of the surface heat flux and the absorptivity of the coating surface in the surface hardening process by the laser. Nevertheless, these studies were only performed on a one-dimensional and two-dimensional model. The obtained results may be less accurate than the truly threedimensional model. Nguyen and Yang used the inverse algorithm in the modified Newton–Raphson method (MNR method) to determine laser power in order to reach the required width penetration in the laser welding process. Through two examples, with every 7 iterations in each example, the speed of the method being applied is excellent. The error between the estimated width penetration and the setup width penetration in the two examples, respectively, is 0.25% and 0.2%. Nguyen and Yang continued to use the MNR method in estimating the

absorption coefficient, which is one of the very important parameters during laser welding. The determination of this parameter depends on the temperature is the complex non-linear inverse problem. The long rod with the small diameter model is heated by the Gauss distribution laser source. The results of the two examples in this study show that the number of future time step increases, the measurement error decreases, the determined value increases, and this result with the constant relation of the future time step is less exact the linear type of the future time. Nguyen et al. used the sequential method to inverse evaluation of the absorption coefficient for the spot laser welding (three-dimensional cylindrical workpiece) with Friedman's heat source model. This assessment, through two examples, includes two main processes: direct analysis and inverse analysis. Firstly, this study applied the effective heat capacity method to find temperature fields by finite element method (FEM) with the boundary conditions, and the absorption coefficient assumed as specific values. In the inverse analysis process, the unknown variables are obtained from exploring points systematically by the iterative method. With several iterations are performed, the intermediate values are substituted for the undetermined variables for the next analysis. The numerical results show that the sequential method is the inverse solution to estimate the absorption coefficient with high accuracy and stability in the spot weld by laser.

1.1.2. The optimization of laser welding by meta-heuristic optimization algorithms

A.G.Olabia et al. integrated the backpropagation artificial neural network and the Taguchi approach to finding out the optimum levels of the welding speed, the laser power and the focal position for CO₂ keyhole laser welding of medium carbon steel butt weld. The optimal solution is valid in the ranges of the welding parameters that were used for training the neural networks. P.Sathiya proposed a method using artificial neural networks combined with genetic algorithm to optimize laser welding process parameters for super austenitic stainless steel. Zhongmei Gao et al. investigated the significance of suitable welding parameters of a hybrid laser arc welding to obtain optimal weld geometry of AISI 316L austenitic steels. Welding current, laser power, traveling speed and distance between laser and arc are taken as input parameters and bead width, penetration depth, and bead reinforcement are taken as output parameters. A five level four factor L₂₅ Taguchi matrix is designed considering the process parameters. A Kriging model opted to proximate the relationship between input parameters and response parameters. The model was then used for optimization of parameters by using genetic algorithm (GA). Ke Zhang et al. proposed an adaptive filling model based on a back propagation neural network (BPNN), combined with a genetic algorithm

(GA) to determine optimized welding parameters which are suitable for the different gaps and mismatches. K. Vijayan et al. presents the comparative studies between Response Surface Methodology (RSM) and Genetic Algorithm (GA) in parameter optimization of laser welding process. Bead-on-plate weld was carried out on low carbon steel plate using diffusion cooled CO₂ laser welding system. Weld bead geometry and heat-affected zone were modeled and optimized as function of three laser welding process parameters namely laser power, welding speed and focal position using RSM based historic data design. Balamurugan et al. presented the use of non-conventional techniques and the Genetic Algorithm (GA) to determine near-optimal settings for the friction welding parameters for AISI 904L super austenitic stainless steel. Through ANOVA analysis, optimization parameters are validated that have an impact on fatigue strength, welding time and partially deformed zone. Based on predicted parameters, after the friction weld is performed, the affected parameters are measured and compared with the original set of parameters. The error is assessed to be quite small. Kanti, K.M. et al. shown the optimization of the input parameters (the plate thickness, pulse frequency, wire feed rate, wire feed rate/travel speed ratio, and peak current) to achieve the desired bead penetration depth by the Pulsed Gas Metal Arc welding technology through the use of the Genetic Algorithm. Optimal results have been compared with a number of experimental results and yielded fairly high accuracy. Besides, the Genetic Algorithm is also used in other research areas. Mohan et al. used fuzzy logic and the Genetic Algorithm to optimize land and crop-related data to achieve high profit and maximum production. Kumar et al. used the Genetic Algorithm (GA) to secure information through implementation and design on ASCII data because it is very easy to convert binary data. Aman V. Mankar et al. presented and implemented the application of the Genetic Algorithm to the Intrusion Detection System to support the effective detection of different ways of the network intrusion.

1.1.3. The h- and p- refinement of The Finite Element Method

I. Babuška and W.C. Rheinboldt proposed error estimation of h-convergent approximations calculate only for element level and measure strain energy related to an element. B. A. Szabo, P. K. Basu, and M. P. Rossow continued to evaluate the strain energy error of p- convergence for two-dimensional LEFM problems, and the result of p-convergent was substantially faster. I. Babuška and B. A. Szabó presented the convergence rate of the FEM. Some general conclusions relative computational efficiencies and reliability of the modes of convergence: the smoothness of the function affected the rate of convergence, the rate of convergence of h- refinement is slower of p-refinement sequences of meshes and p-distributions can be optimally designed

at singularities, the p-version meets both efficient and reliable better than the h-version. J. E. Flaherty presented local error evaluation for two 2D models (the Poisson problem in the plane and the plane elasticity problem) using the adaptive h-type FEM based on interpolation estimates and the 'extraction formulas' of BabuSka and Miller. The results compared with those obtained by the 'ad-hoc' methods. However, these formulas made more widespread for certain nonlinear cases, general elliptic boundary value problems. B. A. Szabó presented the meshes design guide for p-extension of the FEM in the evaluation and controlling error. This is very convenient, inexpensive, and the establishment of engineering data is calculated with accuracy and reliability. The results were proved by calculating stress at singularities in three applications: L-shaped plane-elastic body, plane-elastic body with many stress singularities, elliptic arch. A. Düster & E. Rank compared the results of p-version with both h-version and adaptive h-refinement through the benchmarking problem for the deformation theory. The superiority and accuracy of p-version are very promising for more complex material models. Y. L. Kuo, W. L. Cleghorn, K. Behdian, & R. G. Fenton pointed out that the guidance of creating a finite element solution with high precision by the h-p-refinement through the problem of the planar four-bar mechanism undergoing high-speed motion but the cost of the computation can increase. Therefore, based on the accuracy and computational cost, users can choose the appropriate refinement methods. Son. Nguyen used h- and p- refinement of the FEM in estimating error and convergence rate for two-dimensional and three-dimensional elastic mechanical problems. Besides, based on the enrichment indicator or the ratio of error indicator, the refinement criteria for the adaptive strategy have also established. A correction for the technique was made to enhance the energy norm assessment, and the results were compared with the least square method. The results seem to suggest that the p-refinement and the h-p-refinement have reduced the best approximation error for problems without singularities, and the h-refinement is more effective at singularities. Michael R. Dörfel, Bert Jüttler, Bernd Simeon has overcome the disadvantages of isogeometric analysis based on NURBS, and the effect was significantly improved. In this paper, an adaptive algorithm, h- refinement with T-splines, has been combined with a posteriori error estimation technique. The potential of IGA to T-splines is evident in numerical examples and paves the way for further developments. Claudio Canuto, Ricardo H. Nochetto, Rob P. Stevenson, and Marco Verani have approached Binev's algorithm to prove the convergence and design an optimal method through two examples: Lacunary Function and Non-degenerate Function, respectively were the self-adjoint elliptic problem (one dimension) and the Poisson problem (two-dimensions). The hinges of Claudio

Canuto et al. is the hp-AFEM. The algorithm of the hp-AFEM consists of two repetition routines: hp-NEARBEST and REDUCE. The near-best hp-approximation of the current discrete solution and data is detected by hp-NEARBEST to achieve the desired accuracy. The error tolerances are reduced by REDUCE but are acceptable. This concatenation has created the converging sequence.

1.2. Objectives

- ✓ Inverse determination of the absorption coefficient and weld size in spot laser welding for AISI 304 steel
- ✓ The optimization of input parameters of laser weld for the AISI 416 and AISI 440FSe stainless steel to control the reached weld size
- ✓ The reliability evaluation of the finite element method with h-refinement and p-refinement for AISI 1080 steel butt welded joints by the laser

The contributions of the dissertation

In order to take advantage of the uniqueness and advantages of laser welding technology, and be the basis for further development of laser welding techniques in the industry, the assessment of weld quality is considered through critical state analysis and reliability evaluation for the weld. The dissertation performed inverse determination of the absorption coefficient and weld size in spot laser welding by the sequential method; Optimal algorithm GA, Jaya & MDE used a selection of input parameters such as laser power, welding speed, fiber diameter to be optimized to achieve the desired weld size; and The finite element method with h- refinement, p- refinement in solving the problem of assessing the reliability butt welded joints for steel by the laser.

The results of the thesis are the basis for the development of more complex problems, even 3D problems, as well as the application of different materials. At the same time, the thesis also contributes to shorten the distance between simulation and experiment; to save materials, effort, and time; bring efficiency, high productivity in experiments, and actual production.

Chapter 2
ESTIMATION OF THE ABSORPTION COEFFICIENT
FOR THE SPOT LASER WELDING FOR AISI 304
STEEL BY THE SEQUENTIAL METHOD

2.1. Mathematical modeling of 3D conduction heat transfer object under the laser sources

2.1.1. The heat conduction equation

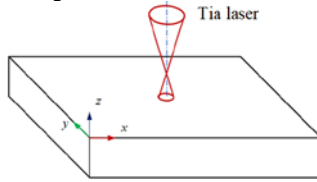


Figure 2.1. The flat sheet is heated by a laser

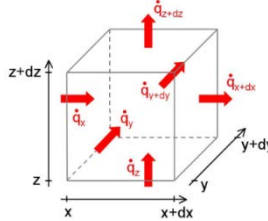


Figure 2.2. A differential element

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_v = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial n} - q_s + h(T - T_o) + \sigma \varepsilon (T^4 - T_o^4) = 0 \quad (2.2)$$

$$\xi = x - vt \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -v \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = 1 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -v \frac{\partial T}{\partial \xi} \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_v = -\rho C_p v \frac{\partial T}{\partial \xi} \quad (2.6)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = h(T - T_o) + \sigma \varepsilon (T^4 - T_o^4) \quad (2.7)$$

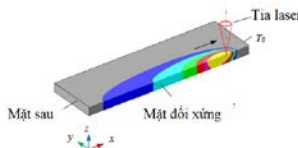


Figure 2.3. The sheet is heated by the displacement laser

2.1.2. Laser heat source

Point, line laser heat source

Gaussian heat source distribution shape

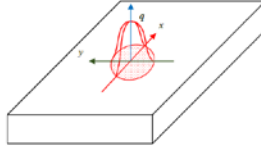


Figure 2.4. Gaussian distribution circular disc model

$$q_s(r) = q(0)e^{-Cr^2} \quad (2.8)$$

$$C = \frac{1}{r_b^2} \quad (2.9)$$

$$q_s(r) = I_o \exp\left(-\frac{3r^2}{r_b^2}\right) = \frac{3\eta P}{\pi r_b^2} \exp\left(-\frac{3r^2}{r_b^2}\right) \quad (2.10)$$

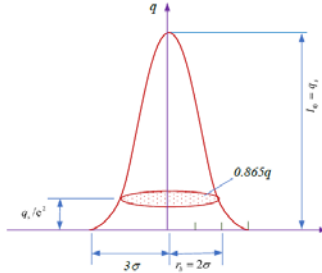
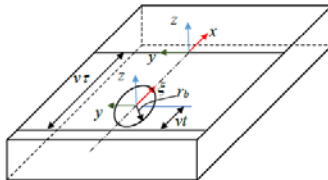


Figure 2.5. Gaussian heat source distribution shape

$$q_s(\xi, y) = \frac{3\eta P}{\pi r_b^2} \exp\left(-3\frac{\xi^2 + y^2}{r_b^2}\right) \quad (2.11)$$



Hình 2.6. Circular disc model in displacement coordinates

Gaussian hemispherical volumetric heat source model

$$q_v(x, y, z) = \frac{6\sqrt{3}\eta P}{\pi\sqrt{\pi}r_b^3} \exp\left(-3\frac{x^2 + y^2 + z^2}{r_b^2}\right) \quad (2.12)$$

Gaussian distribution ellipse-shaped volumetric heat source model

$$q_v(x, y, z, t) = \frac{6\sqrt{3}\eta P}{abc\pi\sqrt{\pi}} \exp\left(-3\left(\frac{[x + v(\tau - t)]^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\right) \quad (2.13)$$

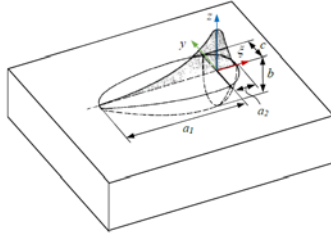


Figure 2.7. Double ellipse heat source model

$$\dot{q}(\xi, y, z, t) = \frac{6\sqrt{3}f_{1,2}\eta P}{a_{1,2}bc\pi\sqrt{\pi}} \exp\left(-3\left(\frac{[x + v(\tau - t)]^2}{a_{1,2}} - 3\frac{y^2}{b^2} - 3\frac{z^2}{c^2}\right)\right) \quad (2.14)$$

2.1.3. The FEM for the conduction heat transfer problem

$$T = \sum_{i=1}^n [N_i(x, y, z)] \{T_i(t)\} \quad (2.15)$$

$$[C]\{T\} - [K]\{T\} = -\{R\} \quad (2.16)$$

$$[C] = \int_{\Omega} \rho C_p [N]^T [N] d\Omega \quad (2.17)$$

$$[K] = \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega + \int_{\Gamma} h [N]^T [N] d\Gamma \quad (2.18)$$

$$\{R\} = \{R^{qv}\} - \{R^{qs}\} + \{R^h\}$$

$$\int_{\Omega} q_v [N]^T d\Omega - \int_{\Gamma} q_s [N]^T d\Gamma_q + \int_{\Gamma} h T_a [N]^T d\Gamma_h \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial T_m}{\partial t} \approx \frac{T_m - T_{m-1}}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (2.20)$$

$$T_{m+\lambda-1} = \lambda T_m + (1-\lambda) T_{m-1} \quad (2.21)$$

$$[C] \left\{ \frac{T_m - T_{m-1}}{\Delta t} \right\} + [K] \{ \lambda T_m + (1-\lambda) T_{m-1} \} = \lambda \{R\}_m + (1-\lambda) \{R\}_{m-1} \quad (2.22)$$

$$\{T\}_m = \left(\frac{C}{\Delta t} + \lambda [K] \right)^{-1} \left(\frac{[C]}{\Delta t} - (1-\lambda)[K] \right) \{T\}_{m-1} + \left(\frac{[C]}{\Delta t} + \lambda [K] \right)^{-1} \{R\}_{\bar{m}} \quad (2.23)$$

$$\{R\}_{\bar{m}} = \lambda \{R\}_m + (1-\lambda) \{R\}_{m-1} \quad (2.24)$$

2.1.4. Effective specific heat method

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (2.25)$$

$$c_{eff} = \frac{\partial H}{\partial T} \quad (2.26)$$

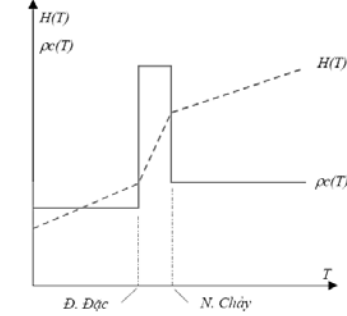


Figure 2.8. The change of the effective specific heat and enthalpy

$$c_{eff} = \rho c_s \quad (T \leq T_s)$$

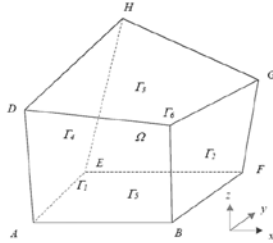
$$c_{eff} = \rho c_f + \frac{L}{T_l - T_s} \quad (T_s < T < T_l) \quad (2.27)$$

$$c_{eff} = \rho c_l \quad (T \geq T_l)$$

2.2. The methodology of the spot welding problem

2.2.1. Problem statement

2.2.2. Forward problem



Hình 2.9. A 3D general conduction heat transfer

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_v = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.28)$$

$$T = T_b \text{ on } \Gamma_1 \text{ \& \ } \Gamma_2 \quad (2.29)$$

$$-n_q(-k\Delta T) = q_s \text{ on } \Gamma_3 \text{ \& \ } \Gamma_4 \quad (2.30)$$

$$-n_c(-k\Delta T) = h(T - T_0) \text{ on } \Gamma_5 \text{ \& \ } \Gamma_6 \quad (2.31)$$

$$T(x, y, z, 0) = T_0; \quad t = t_0 \quad (2.32)$$

2.2.3. Sequential method

Direct/forward problem

At the $t = t_m$, equation (2.28) and the boundary condition:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T_m}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T_m}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T_m}{\partial z} \right) + \phi_m^{q_s, i_{qv}} = \rho C \frac{\partial T_m}{\partial t} \quad (2.33)$$

$$T_b(x_i, y_i, z_i, t_m) = \phi_m^{q_s, i_{qs}} \quad (2.34)$$

$$q_{s,m}(x_i, y_i, z_i, t_m) = \phi_m^{q_s, i_{qs}} \quad (2.35)$$

$$q_{c,m}(x_i, y_i, z_i, t_m) = \phi_m^{q_c, i_{qc}} \quad (2.36)$$

$$T(x, y, z, t_{m-1}) = T_{m-1} \quad (2.37)$$

$$\begin{cases} \phi_{m+r}^T = \phi_m^T + \xi(r-1)(\phi_m^T - \phi_{m-1}^T) \\ \phi_{m+r}^{qs} = \phi_m^{qs} + \xi(r-1)(\phi_m^{qs} - \phi_{m-1}^{qs}) \\ \phi_{m+r}^c = \phi_m^c + \xi(r-1)(\phi_m^c - \phi_{m-1}^c) \\ \phi_{m+r}^{qv} = \phi_m^{qv} + \xi(r-1)(\phi_m^{qv} - \phi_{m-1}^{qv}) \end{cases} \quad (2.38)$$

Sensitivity problem

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T_m}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T_m}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T_m}{\partial z} \right) + \frac{\partial \phi_m^{q_s, i_{qv}}}{\partial \phi_m^{s, i_s}} = \rho C \frac{\partial T_m}{\partial t} \quad (2.39)$$

$$X_b(x_i, y_i, z_i, t_m) = \frac{\partial \phi_m^{T, i_T}}{\partial \phi_m^{s, i_s}} \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial q_{s,m}(x_i, y_i, z_i, t_m)}{\partial \phi_m^{s, i_s}} = \frac{\partial \phi_m^{qs, i_{qs}}}{\partial \phi_m^{s, i_s}} \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial q_{c,m}(x_i, y_i, z_i, t_m)}{\partial \phi_m^{s, i_s}} = \frac{\partial \phi_m^{qc, i_{qc}}}{\partial \phi_m^{s, i_s}} \quad (2.42)$$

$$X(x_i, y_i, z_i, t_{m-1}) = X_{m-1} = 0 \quad (2.43)$$

$$X_m(x_i, y_i, z_i, t_m) = \frac{\partial T_m(x_i, y_i, z_i, t_m)}{\partial \phi_m^{s, i_s}} \quad (2.44)$$

Modified Newton-Raphson method (MNR method)

$$\Phi^{j,j} = \Phi_c^{j,j} - \Phi_m^{j,j} = 0 \quad (2.45)$$

$$p \times r > n_T + q_{qs} + n_c + n_{qv} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} \Phi &= [\Phi^{j,m}, \Phi^{j,m+1}, \Phi^{j,m+2}, \dots, \Phi^{j,m+r}]^T \\ \Phi &= [\Phi^{1,m}, \Phi^{1,m+1}, \Phi^{1,m+2}, \dots, \Phi^{1,m+r}, \\ &\quad \Phi^{2,m}, \Phi^{2,m+1}, \Phi^{2,m+2}, \dots, \Phi^{2,m+r}, \\ &\quad \dots \dots \dots \dots \dots \\ &\quad \Phi^{p,m}, \Phi^{p,m+1}, \Phi^{p,m+2}, \dots, \Phi^{p,m+r}]^T \end{aligned}$$

$$\Phi = \{\widehat{\Phi}_u\} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} x &= \{\Phi_m^{T,1}, \Phi_m^{T,2}, \dots, \Phi_m^{T,n_T}, \Phi_m^{qs,1}, \Phi_m^{qs,2}, \dots, \Phi_m^{qs,n_{qs}}, \\ &\quad \Phi_m^{c,1}, \Phi_m^{c,2}, \dots, \Phi_m^{c,n_c}, \Phi_m^{qv,1}, \Phi_m^{qv,2}, \dots, \Phi_m^{qv,n_{qv}}\}^T \\ &= \{x_1, x_2, \dots, x_{n_T+n_{qs}+n_c+n_{qv}}\}^T \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [\Psi^T(x^k) \Psi(x^k)]^{-1} \Psi^T(x^k) \Phi(x^k) \quad (2.49)$$

The stopping criteria

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| / \|x^{(k+1)}\| \leq \delta \quad (2.50)$$

$$\|J(x^{(k+1)}) - J(x^{(k)})\| / \|J(x^{(k+1)})\| \leq \varepsilon_s \quad (2.51)$$

$$\text{Với } \|J(x^{(k+1)})\| = \sum_{i=1}^r [\Phi_c^i - \Phi_{cm}^i]^2 \quad (2.52)$$

2.3. The results and discussions

2.3.1. Problem statement

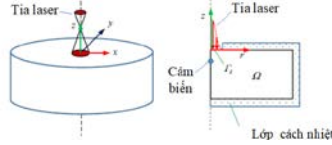


Figure 2.10. The model of spot laser welding

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rk(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(rk(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \rho(T) C(T) \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.53)$$

$$\text{At the surface } (\Gamma_s): -k(T) \frac{\partial T}{\partial x} = q(r) \quad (2.54)$$

$$\text{At the different surface: } \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (2.55)$$

$$T(r, z, 0) = T_0 \quad (2.56)$$

$$q(r) = \frac{3.P.\eta}{\pi r_b^2} \exp\left(\frac{-3r^2}{r_b^2}\right) \quad (2.57)$$

2.3.2. Sequential method

Direct/forward problem

At the $t = t_m$, the conduction heat transfer equation of the spot laser welding:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rk(T_m) \frac{\partial T_m}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(rk(T_m) \frac{\partial T_m}{\partial z} \right) = \rho(T_m) C(T_m) \frac{\partial T_m}{\partial t} \quad (2.58)$$

$$\text{At the surface } \Gamma_s: -k(T_m) \frac{\partial T_m}{\partial x} = q_m(r) \quad (2.59)$$

$$\text{At the different surface: } \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (2.60)$$

$$T(r, z, t_{m-1}) = T_{m-1} \quad (2.61)$$

$$q_m(r) = \frac{3P.\eta_m}{\pi r_b^2} \exp\left(\frac{-3r^2}{r_b^2}\right) \quad (2.62)$$

$$\hat{\eta}_{m+r}^q = \hat{\eta}_m^q + \xi(r-1)(\hat{\eta}_m^q - \hat{\eta}_{m-1}^q) \quad (2.63)$$

Sensitivity problem

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rk(T_m) \frac{\partial X_m}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(rk(T_m) \frac{\partial X_m}{\partial z} \right) = \rho(T_m) C(T_m) \frac{\partial X_m}{\partial t} \quad (2.64)$$

$$\text{At the surface } (\Gamma_s): -k(T_m) \frac{\partial X_m}{\partial x} = \frac{\partial q_m(r)}{\partial \hat{\eta}_m} \quad (2.65)$$

$$\text{At the different surface: } \frac{\partial X_m}{\partial x} = 0 \quad (2.66)$$

$$X(r, z, t_{m-1}) = X_{m-1} = 0 \quad (2.67)$$

The sensitive solution can be obtained directly through by the finite element method

Modified Newton-Raphson method (MNR)

$$\hat{\eta}_m^{(k+1)} = \hat{\eta}_m^{(k)} - \left[X^T(\hat{\eta}_m^{(k)}) X(\hat{\eta}_m^{(k)}) \right]^{-1} X^T(\hat{\eta}_m^{(k)}) \Phi(\hat{\eta}_m^{(k)}) \quad (2.68)$$

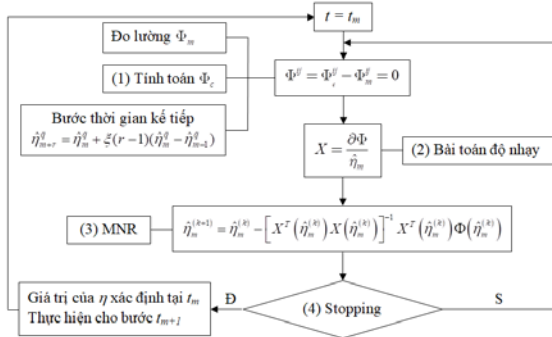
The stopping criteria

$$\left\| \hat{\eta}_m^{(k+1)} - \hat{\eta}_m^{(k)} \right\| / \left\| \hat{\eta}_m^{(k+1)} \right\| \leq \delta \quad (2.69)$$

$$\left\| S(\hat{\eta}_m^{(k+1)}) - S(\hat{\eta}_m^{(k)}) \right\| / \left\| S(\hat{\eta}_m^{(k+1)}) \right\| \leq \varepsilon_s \quad (2.70)$$

$$\text{Where: } \left\| S(\hat{\eta}_m^{(k+1)}) \right\| = \sum_{i=1}^r \left[\Phi_c^i - \Phi_m^i \right]^2 \quad (2.71)$$

2.3.3. Algorithm



Hình 2.11. Scheme of algorithm

2.3.4. The results and discussions

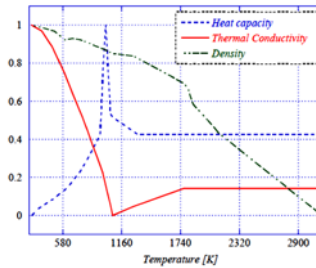


Figure 2.12. Characteristics of AISI 304 steel

Two examples are presented to demonstrate that the proposed method can estimate accurately the absorption coefficient in spot laser welding. In two examples, the cylindrical substrate has the height of $H = 5\text{mm}$ and the diameter of $d = 20\text{mm}$. A thermocouple is located at $K(0, -1\text{mm})$.

$$T^m = T^c + \lambda_e \sigma \quad (2.72)$$

$$-2.576 \leq \lambda_e \leq 2.576$$

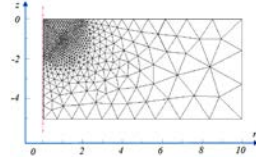


Figure 2.13. The FEM mesh configuration

$$\mu = \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} \left| \frac{f - \hat{f}}{\hat{f}} \right| \quad (2.73)$$

a. Example 1

A constant absorption coefficient of $\eta = 0.3$ is assumed in this example. The workpiece is initially at a uniform temperature ($T_0 = 27^\circ\text{C}$), and then is heated by a laser beam with its effective radius of $r_b = 0.63\text{mm}$ and power of $P = 400\text{W}$. In general, the laser heat source can be obtained as follows:

$$q_m(r) = \frac{3 \times 400 \times 0.3}{\pi \times (0.63 \times 10^{-3})^2} \exp\left(\frac{-3 \times r^2}{(0.63 \times 10^{-3})^2}\right) \left(\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right) \quad (2.74)$$

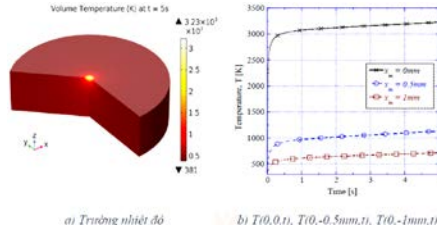


Figure 2.14. The temperature field in the welding sample

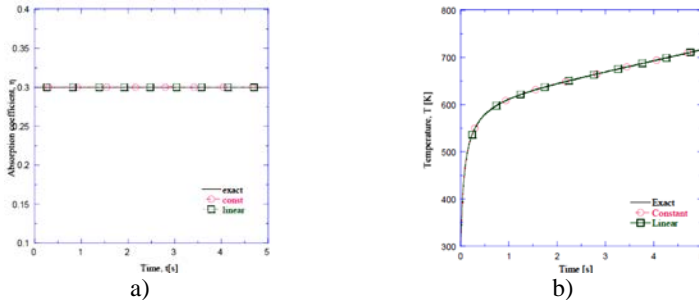
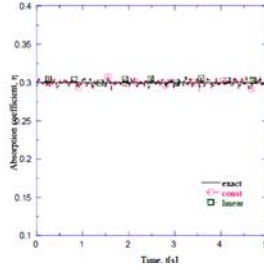


Figure 2.15. The result of η with $\sigma = 0$, example 1



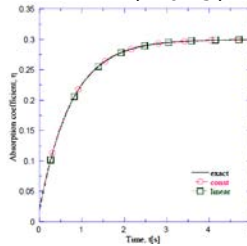
Hình 2.16. The result of η with $\sigma = 1.5$ and $r = 2$

Table 2.1. Relative average error of example 1

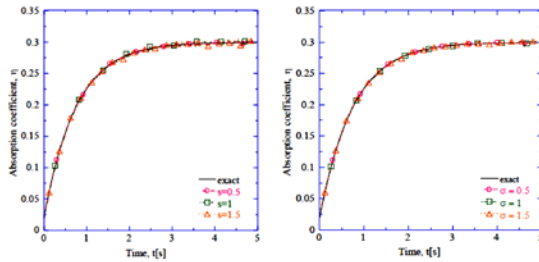
Cases	Future time step r	
	2	4
Constant		
$\sigma = 1$	0.0053	0.0022
$\sigma = 1.5$	0.008	0.0033
Linear		
$\sigma = 1$	0.0066	0.0041
$\sigma = 1.5$	0.01	0.0044

b. Example 2

$$\eta(t) = 0.3 \times (1 - 6.5 \times 10^{-1}) \exp\left(-\frac{t-2}{0.75}\right) \quad (2.75)$$



Hình 2.17. The result of η with $\sigma = 0$ and $r = 2$, example 2



a) $r = 2$

b) $r = 4$

Figure 2.18. The result of η in example 2

Bảng 2.2. Relative average error of example 2

Cases	Future time step r	
	2	4
Constant		
$\sigma = 0.5$	0.0042	0.0061
$\sigma = 1$	0.0065	0.0072
$\sigma = 1.5$	0.0089	0.0094
Linear		
$\sigma = 0.5$	0.0071	0.0121
$\sigma = 1$	0.0102	0.0134
$\sigma = 1.5$	0.0133	0.0148

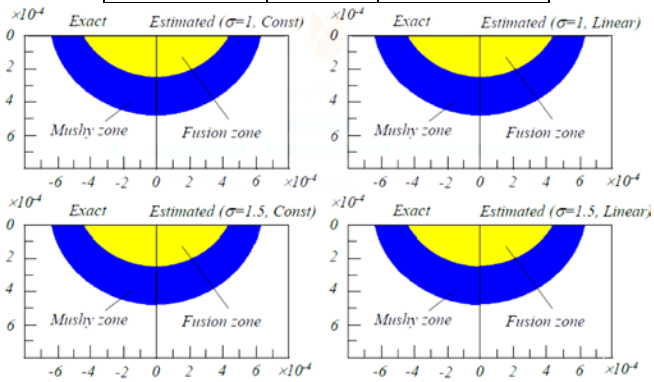


Figure 2.19. The exact and estimated weld size

Bảng 2.3. Weld zone width and penetration depth at $t = 5s$ in example 2

Cases	Weld zone width (mm)	Weld penetration depth (mm)
$\sigma = 0$	0.4425	0.2375
$\sigma = 1$ (Constant)	0.4418	0.2366
$\sigma = 1$ (Linear)	0.4419	0.2368
$\sigma = 1.5$ (Constant)	0.4415	0.2364
$\sigma = 1.5$ (Linear)	0.4416	0.2365

Table 2.4. Error of weld zone width and penetration depth at $t = 5s$ in example 2

Cases	Error of weld zone width (%)	Error of weld penetration depth (%)
$\sigma = 1$ (Constant)	0.158	0.379
$\sigma = 1$ (Linear)	0.136	0.295
$\sigma = 1.5$ (Constant)	0.23	0.46
$\sigma = 1.5$ (Linear)	0.2	0.42

Chapter 3

THE OPTIMIZATION OF INPUT PARAMETERS TO CONTROL THE REACHED WELD SIZE OF LASER WELD FOR THE AISI 416 AND AISI 440FSE STAINLESS STEEL BY META-HEURISTIC OPTIMIZATION ALGORITHMS

3.1 Optimization algorithms

3.1.1 The Genetic Algorithm (GA)

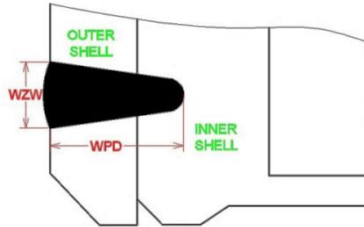
3.1.2 The JAYA Algorithm

3.1.3 The Modified Differential Evolution (MDE) algorithm

Pseudo-code của thuật toán MDE

3.2. Problem formulation

3.2.1 The mode laser welding



(WZW: Weld Zone Width, WPD: Weld Penetration Depth)

Figure 3.1. The weld bead characteristics

$$WZW = (-221.78917 + 0.26482 \times LP + 21.185 \times WS + 1.265 \times FD) \quad (3.1)$$

$$WPD = (891.94 + 213.06 \times LP - 250.69 \times WS - 93.61 \times FD - 73.75 \times LP \times WS - 26.94 \times LP \times FD + 30.97 \times WS \times FD) \times (1e - 4) \quad (3.2)$$

3.2.2 The objective function

$$\begin{cases} f_1 = |WZW_{ref} - WZW| \\ f_2 = |WPD_{ref} - WPD| \end{cases} \quad (3.3)$$

The problem is to find the minimum value of the f_1 and f_2 functions. Alternatively, equation (3.3) is shown as follows:

$$\begin{cases} f = \lambda \times |WZW_{ref} - WZW| + (1 - \lambda) \times |WPD_{ref} - WPD| \\ WZW_{min} \leq WZW \leq WZW_{max}; WPD_{min} \leq WPD \leq WPD_{max} \end{cases} \quad (3.4)$$

3.2.3. The algorithm diagram

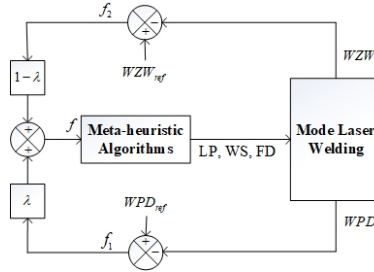


Figure 3.2. The diagram of optimal algorithm

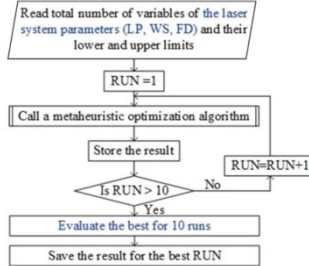


Figure 3.3. The optimal algorithm flowchart .

Table 3.3. Parameters of GA, JAYA and MDE Algorithm

Algorithm	Parameters	Value
GA	Mutation rate	0.2
	Crossover rate	0.7
JAYA	Without	
MDE	Mutation value (F)	Random [0.4; 1.0]
	Crossover Probability (CR)	Random [0.7; 1.0]

3.3. The results and discussions

Table 3.4. Bounds for 3 key parameters

Parameters	Lower Bound	Upper Bound
LP - Laser Power	800 (W)	1100 (W)
WS - Welding Speed	4.5 (m/min)	7.0 (m/min)
FD - Fiber Diameter	300 (μm)	400 (μm)

The laser weld for martensitic AISI 416 and AISI 440FSe stainless steel in a constrained overlap combination in which outer shell with a thickness of 0.55 mm. The proposed methods create the desired weld with properties ($WZW_{ref} = 570 \mu\text{m}$, $WPD_{ref} = 840 \mu\text{m}$).

3.3.1. The Genetic Algorithm (GA)

The factor λ used in the objective function (3.4) is optimally selected equal 0.1

Table 3.5. The optimized and best target value

Run	Parameters value			Best fitness value $f (\mu\text{m})$
	LP (W)	WS (m/min)	FD (μm)	
1	908.99	6.11	335.46	0.2599
2	943.69	6.27	322.46	0.2599
3	967.60	6.10	314.57	0.8741
4	920.25	5.62	332.43	0.9060
5	917.90	5.61	333.35	0.9151
6	927.37	6.40	327.94	0.4590
7	941.15	6.49	322.80	0.3359
8	911.00	6.14	334.59	0.4152
9	981.12	6.66	308.76	0.0222
10	942.22	6.31	322.99	0.3915

Table 3.6. The error between the results of this study and the Khan's experiment I

$WZW_{ref} = 570 \mu\text{m}$ và $WPD_{ref} = 840 \mu\text{m}$			
	LP (W)	WS (m/min)	FD (μm)
Actual (Khan)	1000	7.0	300
The result of the thesis	981.12	6.66	308.76
Error (%)	-1.89	-4.80	2.92

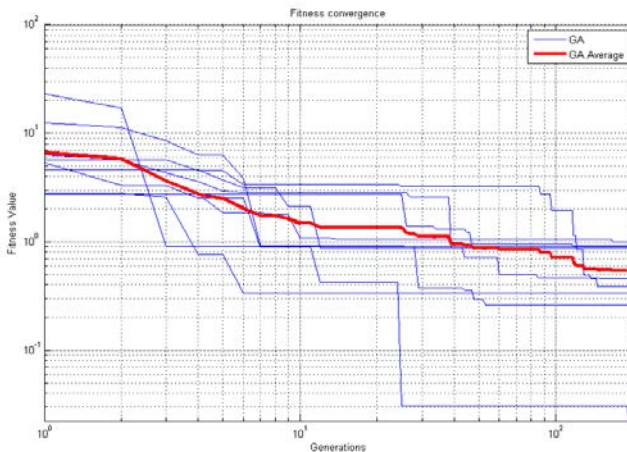


Figure 3.4. The mean value of fitness convergence f

The error of the input parameters LP, WS, and FD, compared to the Khan's values, respectively, were 1.89 %, 4.80 %, and 2.92 %.

3.3.2. The GA, JAYA và MDE algorithm

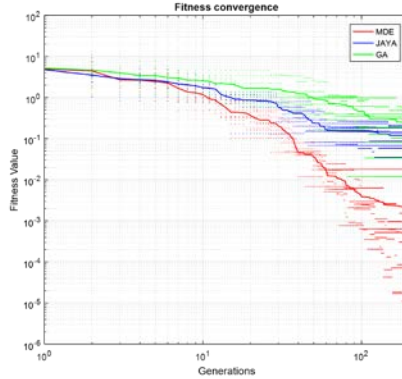
The factor λ used in the objective function (3.4) is optimally selected equal 0.5

Table 3.7. The optimized and best target value

Run	Algorithm	Parameters value			Best fitness value $f(\mu\text{m})$
		LP (W)	WS (m/min)	FD (μm)	
1	GA	844.14	5.08	364.15	0.2919
	JAYA	930.97	6.19	327.12	0.0817
	MDE	881.92	5.61	347.23	5.91e-05
2	GA	902.20	5.86	338.69	0.1026
	JAYA	943.31	6.33	322.35	0.0585
	MDE	870.42	5.45	352.30	0.0002
3	GA	968.21	6.56	313.28	0.0339
	JAYA	1005.80	6.87	300.31	0.1841
	MDE	825.25	4.74	373.61	0.0002
4	GA	889.65	5.71	343.86	0.0814
	JAYA	1007.24	6.86	300	0.0882
	MDE	856.85	5.25	358.46	9.34e-06
5	GA	867.79	5.40	353.78	0.3083
	JAYA	956.56	6.47	317.44	0.2135
	MDE	988.92	6.73	306.05	3.07e-06
6	GA	894.23	5.74	342.18	0.3919
	JAYA	971.01	6.58	312.31	0.0682
	MDE	913.82	6.01	333.87	0.0004
7	GA	864.75	5.37	354.57	0.5660
	JAYA	810.89	4.50	380.83	0.0841
	MDE	901.90	5.87	338.75	0.0005
8	GA	893.07	5.74	342.88	0.4838
	JAYA	839.47	4.99	366.59	0.0872
	MDE	965.77	6.54	314.13	0.0001
9	GA	919.62	6.08	331.55	0.0118
	JAYA	843.65	5.05	364.62	0.0350
	MDE	991.82	6.76	305.05	0.0180
10	GA	884.84	5.64	346.11	0.1871
	JAYA	847.98	5.14	362.49	0.1944
	MDE	837.43	4.95	367.63	4.57e-05

Table 3.8. The resulted parametric set for three comparative algorithms

Algorithm	Parameters value			Best fitness value $f(\mu\text{m})$
	LP (W)	WS (m/min)	FD (μm)	
GA	919.62	6.08	331.55	0.0118
JAYA	843.65	5.05	364.62	0.0350
MDE	988.92	6.73	306.05	3.07e-06



Hình 3.5. Giá trị trung bình của hàm mục tiêu f

Table 3.9. The errors of three optimal parameters compared to the result of the affirmation experiment I by Khan

$WZW_{ref}=570 \mu m$ và $WPD_{ref}=840 \mu m$				
		LP (W)	WS (m/min)	FD (μm)
Actual (Khan)		1000	7.0	300
Error (%)	GA	-8.03	-13.14	10.51
	JAYA	-15.70	-27.80	21.54
	MDE	-1.10	-3.85	2.01

Table 3.10. The optimal results and the errors of three optimal parameters compared to the results of the affirmation experiments II and III by Khan

Modified Differential Evolution (MDE) algorithm				
		LP (W)	WS (m/min)	FD (μm)
$WZW_{ref}=660 \mu m$ $WPD_{ref}=634 \mu m$	Actual (Khan)	900.00	6.50	400.00
	The result of the thesis ($\lambda = 0.9$)	859.05	6.99	399.99
	Error (%)	-4.5	7.5	0.0025
$WZW_{ref}=485 \mu m$ $WPD_{ref}=939 \mu m$	Actual (Khan)	850.00	5.000	300.00
	The result of the thesis ($\lambda = 0.9$)	875.90	4.501	300.01
	Error (%)	3.04	-9.9	3.3e-3

The results show that three proposed meta-heuristic optimization algorithms for laser system parameters to achieve the desired weld size are reasonable and MDE algorithm for error is smaller than GA and JAYA algorithms..

Chapter 4
THE RELIABILITY EVALUATION OF THE FINITE ELEMENT
METHOD WITH H- REFINEMENT AND P-REFINEMENT FOR AISI
1080 STEEL BUTT WELDED JOINTS BY THE LASER

4.1. The general theory of the reliable estimation the h- and p- refinement of the finite element method (FEM)

As we know in the FEM, a continuum model presented by a certain number of elements with a simple approximation field causes the presence of discretization error in solutions. This error depends on many factors such as a number of elements, type of element, an order of interpolation functions, the shape of elements, singular points in a problem domain, and the representation of applied loads and support conditions.

Thus, in practical engineering analysis, it is necessary to check the discretization error by observing the convergence of results. Of course, it must be sufficiently reliable. In order to evaluate its reliability, two simple indices can be introduced: *the effectivity index θ and the uniformity index SD* .

The equilibrium equation (the strong form):

$$Lu = f \Rightarrow Lu - f = 0; \quad u \in \Omega \quad (4.1)$$

The principle of virtual work (weak form):

$$\int_{\Omega} v(Lu - f)d\Omega = 0; \quad u, v \in \Omega \quad (4.2)$$

The homogenous Dirichlet's boundary condition:

$$u = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_D \quad (4.3)$$

Find $u \in V$ such that it satisfies equation (4.3):

$$B(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V \quad (4.4)$$

where V is the infinite – dimension space, $B(u, v)$ is the virtual work of internal stresses, $L(v)$ is the virtual work of external forces.

The energy norm:

$$\|u\|_{E(\Omega)} = \sqrt{B(u, u)} \quad (4.5)$$

The strain energy:

$$U(u) = \frac{1}{2}B(u, u) \quad (4.6)$$

Denote by u the exact displacement, σ is the stress fields, and by u_h and σ_h the ones obtained by the finite element method using a mesh of size h , then the point-wise error in the displacement field is:

$$(e_h)_u = u - u_h \quad (4.7)$$

and the point-wise error in the stress field is:

$$(e_h)_\sigma = \sigma - \sigma_h \quad (4.8)$$

Since it is not convenient to describe such point-wise error, it is always hopeful of measuring the error by certain norms for practical considerations, such as for the determination of global precision and elemental ones.

For problems for which a functional called total energy exists, the finite element solution can be shown to be the one which minimizes the global stress error of the structure in the energy sense, i.e., the solution \mathbf{u}_h corresponds to:

$$\text{Minimise } \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h)^T \mathbf{H}^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) d\Omega \quad (4.9)$$

where Ω is the domain, \mathbf{H} is the Hooke's elastic matrix, and \mathbf{U}_h is the finite element subspace. Consequently, the energy norm of the error:

$$\|e_h\|_{E(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h)^T \mathbf{H}^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) d\Omega \right]^{1/2} \quad (4.10)$$

In most cases, the exact solution is unknown, so the error must be estimated. The a-posteriori error estimation consists in finding a procedure that can offer a reliable estimate of the exact energy norm of the error not only at the global level but also at the elemental level. Denote by \mathcal{E} such as to estimate:

$$\mathcal{E} \approx \|e_h\|_{E(\Omega)} = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{E(\Omega)} \quad (4.11)$$

which is often called an *error estimator*.

The algebraic rate of convergence:

$$\|e_h\|_{E(\Omega)} = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{E(\Omega)} \leq \frac{k}{N^\beta} \quad (4.12)$$

where k is a positive problem's dependent constant, N the number of degrees of freedom, and β the asymptotic rate of convergence.

The error estimation using Richardson extrapolation technique:

$$\|e_h\|_{E(\Omega)}^2 = 2 \|\mathbf{U} - \mathbf{U}_h\|_{E(\Omega)} = \frac{k^2}{N^{2\beta}} \quad (4.13)$$

The exact relative error:

$$\eta_{FEM} (\%) = \sqrt{\frac{\mathbf{U} - \mathbf{U}_h}{\mathbf{U}}} \times 100\% \quad (4.14)$$

The estimated relative error (using the Richardson extrapolation technique):

$$\eta_{extra} (\%) = \sqrt{\frac{\mathbf{U}_h - \mathbf{U}_{h-1}}{\mathbf{U}_h}} \times 100\% \quad (4.15)$$

The effectivity index:

$$\theta = \frac{\eta_{extra}}{\eta_{FEM}} \quad (4.16)$$

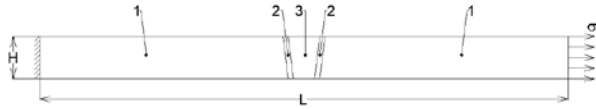
The uniformity index:

$$SD = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\theta_i - \bar{\theta})^2 \right]^{1/2} \quad (4.17)$$

where θ_i is the index for elemental level, $\bar{\theta}$ is the average index for global level
 For the range $1 \leq \eta(\%) \leq 10$, *an estimator is said reliable if: $0.8 \leq \theta \leq 1.2$ and $SD \leq 0.2$*

4.2. The problem of laser-welded butt joints under tensile stress

We consider the model of the laser butt weld (as shown in Figure 1)



1. Base Metal (BM) 2. HAZ 3. Weld Zone (WZ)

Figure 1. The scheme of the weld

The base metal is AISI 1018 steel. The modulus of elasticity $E = 205$ GPa and the Poissons ratio $\nu = 0.29$

The length $L = 100$ mm, the high $H = 8$ mm, and the thick $t = 1$ mm

The tensile strength of the laser weld after the test $\sigma = 562$ MPa

The volume $V = L \times H \times t = 800$ mm³

The exact strain energy U by given:

$$U = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 V}{E} \quad (4.18)$$

\Rightarrow The value of the exact strain energy

$$U = 0.616281 \text{ kJ} \quad (4.19)$$

The finite element analyses were done in the case of plane strain.

The analysis is implemented by Matlab code for not only the finite element analyses but also error estimation. The detail of the Matlab code program structure is shown in Figure 2.

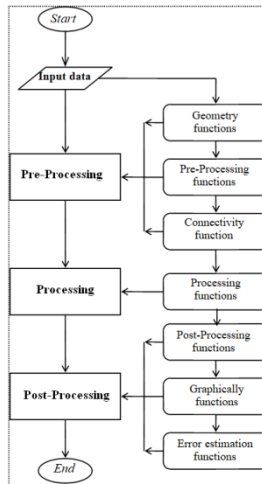


Figure 2. The Matlab code program structure

4.3. Results and Discussion

The results of the finite element analysis are shown in Figure. 3 and Figure. 4

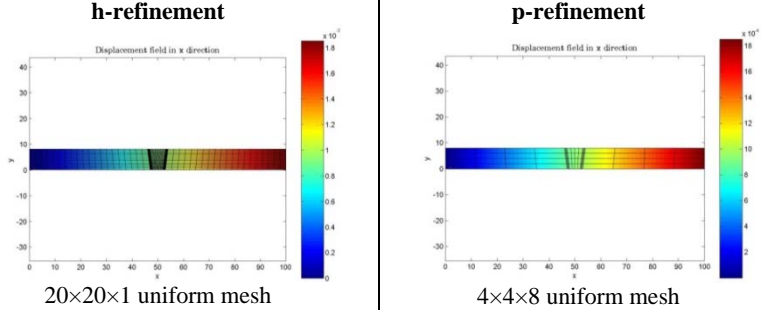


Figure 3. The displacement field in the x-direction

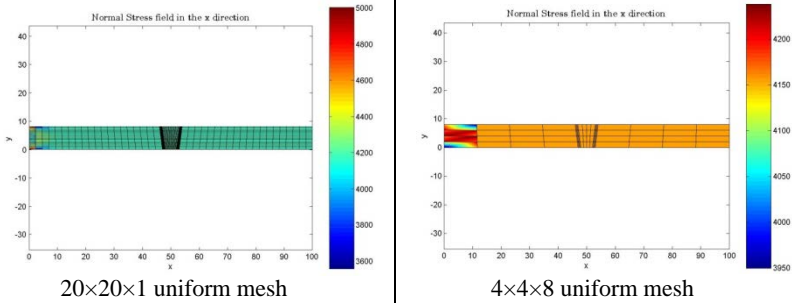


Figure 4. The stress field in the x-direction

Corresponds to mesh, element numbers, and Dofs, the values of the strain energy and the error are presented in Table 1 and Table 2

Table 1. The h- refinement estimation results with the uniform mesh

Mesh	Element numbers	Dofs	The FEM strain energy (kJ)	The extra strain energy (kJ)	CPU time (s)
10×10	500	1122	0.614324438	0.6151587149	4.311
11×11	605	1344	0.614415158	0.6151357316	6.466
12×12	720	1586	0.614489235	0.6151203606	10.007
13×13	845	1848	0.614550606	0.6151100296	15.431
14×14	980	2130	0.614602102	0.6151028451	23.057
15×15	1125	2432	0.614645795	0.6150978253	33.682
16×16	1280	2754	0.614683239	0.6150942646	49.702
17×17	1445	3096	0.614715611	0.6150917687	66.657
18×18	1620	3458	0.614743821	0.6150899289	92.058
19×19	1805	3840	0.614768580	0.6150885422	122.959
20×20	2000	4242	0.614790452	0.6150875415	166.091

Dofs	η_{FEM} (%)	η_{extra} (%)	θ	$\bar{\theta}$	SD
1122	5.634525995	3.682658519	0.653588	0.535667	0.019528
1344	5.502347809	3.422580574	0.622022		
1586	5.392015867	3.203154843	0.594055		
1848	5.298867385	3.015739461	0.569129		
2130	5.219426836	2.853210237	0.546652		
2432	5.151060698	2.710887540	0.526278		
2754	5.091743887	2.585019044	0.507688		
3096	5.039898373	2.472948899	0.490674		
3458	4.994279531	2.372119294	0.474967		
3840	4.953894817	2.280763997	0.460398		
4242	4.917944624	2.197735303	0.446881		

Table 2. The p- refinement estimation results with 4×4 uniform mesh

Degree p	Element numbers	Dofs	The FEM strain energy (kJ)	The extra strain energy (kJ)	CPU time (s)
3	80	946	0.6153716271	0.6162412117	1.338
4		1474	0.6155020466	0.6155621713	2.509
5		2162	0.6155502623	0.6155911812	5.415
6		3010	0.6155853998	0.6157916617	11.768
7		4018	0.6156130668	0.6158877709	24.952
8		5186	0.6156326251	0.6157169343	49.870

Dofs	η_{FEM} (%)	η_{extra} (%)	θ	$\bar{\theta}$	SD
946	3.841329993	3.756475407	0.977910103	0.506616	0.103834
1474	3.555218998	0.988304002	0.277986814		
2162	3.443430762	0.815296901	0.23676878		
3010	3.359622269	1.830174929	0.544756161		
4018	3.292131168	2.111941071	0.641511824		
5186	3.243573294	1.170165056	0.360764179		

The values of the exact relative error η_{FEM} (%) are calculated from Eq. 14 between the exact $U = 0.616281$ kJ (Equation 4.20) and the FEM (in Table 1 and Table 2) strain energy values. The values of the estimated relative error η_{extra} (%) in Table 1 and Table 2 are calculated from Equation 4.15 between the FEM and the extra strain energy values.

This value ranges of the exact relative error:

$$5.634525995 \geq \eta_{h-FEM}(\%) \geq 4.917944624 \quad \&$$

$$3.841329993 \geq \eta_{p-FEM}(\%) \geq 3.243573294$$

and the estimated relative error:

$$3.682658519 \geq \eta_{h-extra}(\%) \geq 2.197735303 \quad \&$$

$$3.756475407 \geq \eta_{p-extra}(\%) \geq 0.815296901$$

The relationships between the number of Dofs and (the strain energy U, the relative error η , the convergence rate θ) of the h- and p- refinement are shown in Fig. 5, Figure 6 and Figure 7. Although the convergence curve of h- refinement is more smooth, the advantage of p-refinement shows that the convergence rate is much faster with only fewer element numbers and degrees of freedom, and lower computational costs.

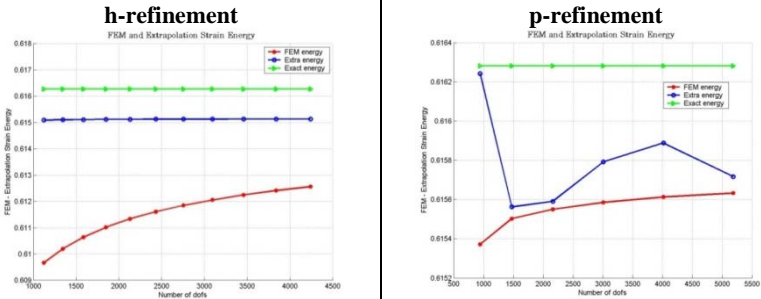


Figure 5. The Dofs and U graph

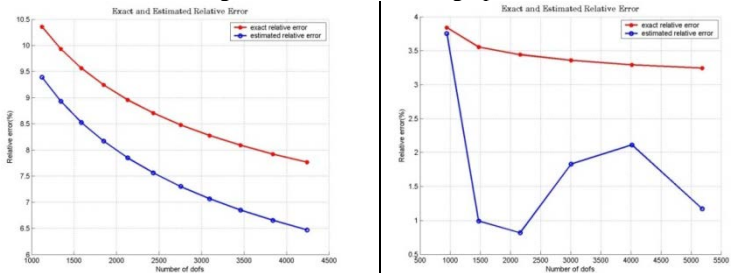


Figure 6. The Dofs and η graph

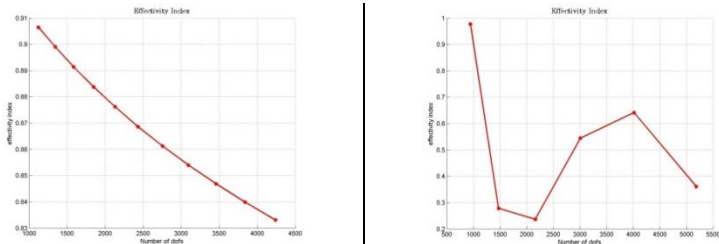


Figure 7. The Dofs and θ curve

The reliability assessment for the h- and p-refinement of the finite element method with the quadrilateral element has performed. The two-dimension laser-welded butt joints under tensile stress for the AISI 1018 steel highness 8mm has considered. The number of mesh surveyed for h- and p-refinement were 11 (degree p is 1) and 6 (degree p is 3 to 8). The relative error value in assessing the error is within the permitted range, less than 10%. Besides, **using the Richardson extrapolation technique** has brought very feasible error values: $\eta_{extra}^{max}(\%) = 3.756475407$ and $\eta_{extra}^{min}(\%) = 0.815296901$. Moreover, with the values of two indicators: the effectivity index $\bar{\theta}_{h-refinement} = 0.535667$ & $\bar{\theta}_{p-refinement} = 0.506616$ and the uniformity index $SD_{h-refinement} = 0.019528$ & $SD_{p-refinement} = 0.103834$, the goal of the paper is confirmed in the specific technical problem.

Chapter 5

CONCLUSIONS

The results of the thesis are the basis for the development of more complex problems, even 3D problems, as well as the application of different materials. At the same time, the thesis also contributes to shorten the distance between simulation and experiment; to save materials, effort, and time; bring efficiency, high productivity in experiments, and actual production.

➤ In this thesis, the Ph.D. student performed inverse determination of the absorption coefficient and weld size in spot laser welding by the sequential method: at each time step is solved by the modified Newton-Raphson method combined with the concept of future time used to establish the absorption coefficient value. The advantages of this method are that the functional form for the unknown absorption coefficient is not necessary to preselect and nonlinear least-square do not need in the algorithm. Two examples have been fulfilled to demonstrate the proposed method. The obtained results can be concluded that the proposed method is an accurate and stable method to inversely determine the absorption coefficient in the spot laser welding, and weld size (weld width and depth) are also very close to the desired value.

➤ Secondly, the inverse optimization of input parameters (Laser Power 'LP' (W), Welding Speed 'WS' (m / min), and Fiber Diameter 'FD' (μm)) of laser weld for the AISI 416 and AISI 440FSe stainless steel to control the reached weld size (weld size is pre-set): Weld Zone Width 'WZW_{ref}' (μm) and Weld Penetration Depth 'WPD_{ref}' (μm) by the three meta-heuristic optimization algorithms: the Modified Differential Evolution (MDE) algorithm, the Genetic Algorithm (GA) and the JAYA algorithm. The result of the GA algorithm with $\lambda = 0.1$ is compared with Khan's affirmation experiment result [25]: the error of the input parameters LP, WS, and FD, respectively, were 1.89 %, 4.80 %, and 2.92 %. Besides, the thesis also presents the effect of three different meta-heuristic algorithms: GA, JAYA and MDE. The MDE algorithm showed better efficiency and the

result of this algorithm is compared with Khan's affirmation experiment result [25] with errors below 10%.

➤ The representation of a continuous field of the problem domain with several piecewise fields results in discretization error in the finite element solution. This error can be reduced by two approaches: by decreasing the sizes of the elements: h- version, or by using higher-order approximation fields: p- version with the objective of obtaining solutions with prespecified accuracy and minimum cost of model preparation and computation. The value of the relative error of the strain energy $\tilde{\eta}_{extra}$ for an unstressed square hole in an infinite plate subjected to unidirectional tension by the h- p- refinement of the FEM reaches a neighboring value of 3%. At the same time, according to the Ph. D. student's knowledge, there have not been many studies evaluating the reliability of this method for welding in general and laser welding in particular. Another novelty of the thesis is that performing the reliability evaluation of the finite element method with h- refinement and p-refinement for AISI 1080 steel butt welded joints by the laser has brought very satisfactory results. Specifically, with h- refinement, the effective index θ is in the range (0.653 - 0.446), $\bar{\theta} = 0.535$ and the index $SD = 0.019$; and with p-refinement, θ is in the range (0.977 - 0.236), $\bar{\theta} = 0.506$ and $SD = 0.103$. The value of the result satisfies the requirement in [88]: $1 \leq \eta (\%) \leq 10, \leq 1.2, SD \leq 0.2$.

REFERENCES

- [1] S. Katayama, *Handbook of Laser Welding Technologies*, Woodhead Publishing, 2013. (Hardcover ISBN: 9780857092649; eBook ISBN: 9780857098771)
- [2] R.C. Crafer, P.J. Oakley, *Laser Processing in Manufacturing*, Springer Netherlands, 1993 (Hardcover ISBN 978-94-011-1570-4)
- [3] E.K.-A. Jr., *Principles of laser materials processing*, Wiley, 2009 (Hardcover ISBN 10: 0470177985 ISBN 13: 9780470177983)
- [4] W.M. Steen, J. Mazumder, *Laser Material Processing*, Springer, 2010. (<https://doi.org/10.1007/978-1-84996-062-5>)
- [5] Juang SC, Tarn YS (2002) Process parameter selection for optimizing the weld pool geometry in the tungsten inert gas welding of stainless steel. *J Mater Process Technol* 122:3337. ([http://dx.doi.org/10.1016/S0924-0136\(02\)00021-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0924-0136(02)00021-3))
- [6] Information on <https://www.open.edu/openlearn/science-maths-technology/engineering-technology/manupedia/laser-beam-welding>
- [7] Information on <https://www.eurobots.net/laser-welding-and-cutting-robots-subc-13-en.html>
- [8] Information on <https://www.emag.com/machines/laser-welding-machines/elc-250-duo.html>
- [9] Information on <https://interestingengineering.com/laser-welding-types-advantages-and-applications>
- [10] Katayama, S. (2010). Understanding and improving process control in pulsed and continuous wave laser welding. *Advances in Laser Materials Processing*, 181–210. doi:10.1533/9781845699819.3.181
- [11] Carrizalez-Vazquez, M., Alvarez-Vera, M., Hernández-Rodríguez, A., Orona-Hinojos, J., Sandoval-Vázquez, G., & Acevedo-Dávila, J., Effect of Laser Welding on the Mechanical Properties AISI 1018 Steel, *MRS Advances*, 2(64), 4031-4039, 2017 (<https://doi.org/10.1557/adv.2017.599>)
- [12] D. Rosenthal, Mathematical theory of heat distribution during welding and cutting, *Welding journal*, 20(5) (1941) 220s-234s.
- [13] V. Pavelic, R. Tanbakuchi, O. Uyehara, P. Myers, Experimental and computed temperature histories in gas tungsten-arc welding of thin plates, *WELD J*, 48(7) (1969) 295
- [14] E. Friedman, Thermomechanical Analysis of the Welding Process Using the Finite Element Method, *Journal of Pressure Vessel Technology*, 97(3) (1975) 206-213
- [15] J. Goldak, A. Chakravarti, M. Bibby, A new finite element model for welding heat sources, *MTB*, 15(2) (1984) 299-305
- [16] J. Goldak, M. Bibby, J. Moore, R. House, B. Patel, Computer modeling of heat flow in welds, *MTB*, 17(3) (1986) 587-600
- [17] K.R. Balasubramanian, N. Siva Shanmugam, G. Buvanashakaran, K. Sankaranarayanan, Numerical and Experimental Investigation of

- Laser Beam Welding of AISI 304 Stainless Steel Sheet, *Advances in Production Engineering & Management*, 3(2) (2008) 93-105.
- [18] N. Siva Shanmugam, G. Buvashekarana, K. Sankaranarayanan, Some studies on weld bead geometries for laser spot welding process using finite element analysis, *Materials & Design*, 34(0) (2012) 412-426.
- [19] N. Yadaiah, S. Bag, Development of egg-configuration heat source model in numerical simulation of autogenous fusion welding process, *International Journal of Thermal Sciences*, 86(0) (2014) 125-138.
- [20] P. Dinesh Babu, G. Buvashekarana, K.R. Balasubramanian, Experimental investigation of laser transformation hardening of low alloy steel using response surface methodology, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 67(5-8) (2013) 1883-1897.
- [21] El-Batahy, Abdel-Monem, Effect of laser welding parameters on fusion zone shape and solidification structure of austenitic stainless steels, *Mater Lett*, 32(2-3) (1997) 155-163.
- [22] K.Y. Benyounis, A.G. Olabi, M.S.J. Hashmi, Effect of laser welding parameters on the heat input and weld-bead profile, *Journal of Materials Processing Technology*, 164-165 (2005) 978-985.
- [23] J.V. Beck, B. Blackwell, C.R. St.Clair, *Inverse heat conduction ill-posed problems*, (1985).
- [24] M.N. Ozisik, *Inverse heat transfer: fundamentals and applications*, (2000) (ISBN 9781560328384)
- [25] Y.S. Sun, C.I. Weng, T.-C. Chen, W.-L. Li, Estimation of Surface Absorptivity and Surface Temperature in Laser Surface Hardening Process, *Japanese Journal of Applied Physics*, 35(6R) (1996) 3658.
- [26] J.-T. Wang, C.I. Weng, J.G. Chang, C.C. Hwang, The influence of temperature and surface conditions on surface absorptivity in laser surface treatment, *J Appl Phys*, 87(7) (2000) 3245-3253.
- [27] H.T. Chen, X.Y. Wu, Estimation of surface absorptivity in laser surface heating process with experimental data, *Journal of Physics D: Applied Physics*, 39(6) (2006) 1141.
- [28] Q. Nguyen, C.-y. Yang, A modified Newton-Raphson method to estimate the temperature-dependent absorption coefficient in laser welding process, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 102 (2016) 1222-1229.
- [29] Benyounis et al. Multi-response optimization of CO2 laser-welding process of austenitic stainless steel. *Optics and Laser Technology*, Vol. 40, pp. 76-87, 2008. (<http://dx.doi.org/10.1016/j.optlastec.2007.03.009>)
- [30] Anawa et al. Optimization of tensile strength of ferritic/austenitic laser-welded Components. *Optics and Laser in Engineering*, Vol. 46, pp. 571-577, 2008. (<http://dx.doi.org/10.1016/j.optlaseng.2008.04.014>)
- [31] Khan et al. Experimental design approach to the process parameter

- optimization for laser welding of martensitic stainless steels in a constrained overlap configuration. *Optics and Laser Technology*, Vol. 43, pp. 158-172, 2011. (<http://dx.doi.org/10.1016/j.optlastec.2010.06.006>)
- [32] Yangyang Zhao et al. Optimization of laser welding thin-gage galvanized steel via response surface methodology. *Optics and Laser in Engineering*, Vol. 50, pp. 1267-1273, 2012. (<http://dx.doi.org/10.1016/j.optlaseng.2012.03.010>)
- [33] Reisgen et al. Optimization of laser welding of DP/TRIP steel sheets using statistical approach. *Optics and laser technology*, Vol. 44, pp. 255-262, 2012. (<https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2011.06.028>)
- [34] Mingjun Zhang et al. Optimization of deep penetration laser welding of thick stainless steel with a 10 kW fiber laser. *Materials and Design*, Vol. 53, pp. 568-576, 2014. (<https://doi.org/10.1016/j.matdes.2013.06.066>)
- [35] Yuewei Ai et al. A defect-responsive optimization method for the fiber laser butt welding of dissimilar materials. *Materials and Design*, Vol. 90, pp. 669-681, 2016. (<https://doi.org/10.1016/j.matdes.2015.10.160>)
- [36] Ahn et al. Parametric optimization and microstructural analysis on high power Yb-fibre laser welding of Ti6Al4V. *Optics and Lasers in Engineering*, Vol.86, pp. 156-171, 2016. (<http://dx.doi.org/10.1016/j.optlaseng.2016.06.002>)
- [37] Zhongmei Gao et al. Parameters optimization of hybrid fiber laser-arc butt welding on 316L stainless steel using Kriging model and GA. *Optics and laser technology*, Vol. 83, pp. 153-162, 2016. (<https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2016.04.001>)
- [38] Shanmugarajan et al. Optimisation of laser welding parameters for welding of P92 material using Taguchi based grey relational analysis. *Defence Tech*, Vol. 12, pp. 343-350, 2016. (<https://doi.org/10.1016/j.dt.2016.04.001>)
- [39] R. Venkata Rao, Dhiraj P. Rai, Joze Balic, A multi-objective algorithm for optimization of modern machining processes, *Engineering Applications of Artificial Intelligence* 61 (2017) 103125. (<https://doi.org/10.1016/j.engappai.2017.03.001>)
- [40] K. Vijayan, P. Ranjithkumar and B. Shanmugarajan, Comparison of Response Surface Methodology and Genetic Algorithm in Parameter Optimization of Welding Process, *Appl. Math. Inf. Sci.* 12, No. 1, 239-248 (2018). (<http://dx.doi.org/10.18576/amis/120124>)
- [41] Yang Yang, Longchao Cao, Qi Zhou, Chaochao Wang, Qing Wu, Ping Jiang, Multi-objective process parameters optimization of Laser-magnetic hybrid welding combining Kriging and NSGA-II, *Robotics and ComputerIntegrated Manufacturing* 49 (2018) 253262. (<https://doi.org/10.1016/j.rcim.2017.07.0033>)
- [42] O.C. Zeinkiewicz, *The finite element method*, 4rd ed., McGraw-Hill,

- New York, 2000. (ISBN 0070841748, 0070841756)
- [43] I.Babuska, O.C. Zeinkiewicz, J.Gago, E.R.de.A.Oliveira, *Accuracy estimates and adaptive refinements in finite element computations*, John Wiley & Sons, 1986.
- [44] A.Promwungkwa, *Data structure and error estimation for an adaptive p-refinement finite element method in 2-D and 3-D solids*, PhD thesis, Placksburg, Virginia, April - 1998.
- [45] L. Demkowicz, Ph. Devloo, J.T. Oden, On an h-type mesh-refinement strategy based on minimization of interpolation errors, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 53, Issue 1, Pages 67-89, ISSN 0045-7825, 1985. ([https://doi.org/10.1016/0045-7825\(85\)90076-3](https://doi.org/10.1016/0045-7825(85)90076-3))
- [46] I. Babuška, B.Q. Guo, The h, p and h-p version of the finite element method; basis theory and applications, *Advances in Engineering Software*, Volume 15, Issues 3-4, Pages 159-174, ISSN 0965-9978, 1992. ([https://doi.org/10.1016/0965-9978\(92\)90097-Y](https://doi.org/10.1016/0965-9978(92)90097-Y))
- [47] Andersson, B. , Falk, U. , Babuška, I. and Von Petersdorff, T., Reliable stress and fracture mechanics analysis of complex components using a h-p version of FEM. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 38: 2135-2163, 1995 (<https://doi.org/10.1002/nme.1620381302>)
- [48] Babuška, I., Petersdorff, v.T. & Andersson, B., *Computation of the vertex singularity factors for laplace equation in 3 dimensions*, Tech. Note BN-1140, Institute for Physical Science and Technology, University of Maryland, USA, 1992.
- [49] W Rachowicz, An anisotropic h-type mesh-refinement strategy, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 109, Issues 1-2, Pages 169-181, ISSN 0045-7825, 1993 ([https://doi.org/10.1016/0045-7825\(93\)90231-L](https://doi.org/10.1016/0045-7825(93)90231-L))
- [50] Michael R. Dörfel, Bert Jüttler, Bernd Simeon, *Adaptive isogeometric analysis by local h-refinement with T-splines*, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 199, Issues 5-8, Pages 264-275, ISSN 0045-7825, 2010 (<https://doi.org/10.1016/j.cma.2008.07.012>)
- [51] H. Zhao, D.R. White, T. DebRoy, Current issues and problems in laser welding of automotive aluminum alloys, *International Materials Reviews*, 44 (1999) 238-266.
- [52] T. DebRoy, S. David, Physical processes in fusion welding, *Review of Modern Physics*, 67(1) (1995) 85-112.
- [53] X. Na, Laser Welding, Sciyo 2010
- [54] D.W. Hahn, M.N. Özişik, *Heat Conduction*, 3 ed., John Wiley & Sons, Inc., 2012
- [55] D. Rosenthal, *The theory of moving sources of heat and its application to metal treatments*, in ASME, 1946.
- [56] N. Rykalkine, *Energy sources for welding*, *Revista de Soldadura*, 6(3)

- (1976) 125-140
- [57] G. Krutz, L. Segerlind, *Finite Element Analysis of Welded Structures, Welding Research Supplement*, 57 (1978) 211-216
- [58] B.M.R. Frewin, D.A. Scott, *Finite Element Model of Pulsed Laser Welding*, *Welding Research Supplement*, 78 (1999) 15s-22s
- [59] A. De, T. DebRoy, Improving reliability of heat and fluid flow calculation during conduction mode laser spot welding by multivariable optimisation, *Sci Technol Weld Joi*, 11(2) (2006) 143-153.
- [60] K. Hong, D.C. Weckman, A.B. Strong, W. Zheng, Modelling turbulent thermofluid flow in stationary gas tungsten arc weld pools, *Sci Technol Weld Joi*, 7(3) (2002) 125-136.
- [61] J.A. Goldak, M. Akhlaghi, *Computational welding mechanics*, Springer, 2005
- [62] B. Carnahan, H.A. Luther, J.O. Wilkes, *Applied Numerical Methods*, Wiley, New York, 1969.
- [63] A. De, S.K. Maiti, C.A. Walsh, H.K.D.H. Bhadeshia, Finite element simulation of laser spot welding, *Sci Technol Weld Joi*, 8(5) (2003) 377-384.
- [64] R.W. Lewis, P. Nithiarasu, K.N. Seetharamu, *Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow*, (2004).
- [65] D.K. Gartling, J.N. Reddy, *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics*, Third Edition, 3 ed., CRC Press, 2010.
- [66] H.-C. Huang, A.S. Usmani, *Finite Element Analysis for Heat Transfer: Theory and Software*, 1 ed., Springer-Verlag London, 1994.
- [67] R.W. Lewis, K. Ravindran, Finite element simulation of metal casting, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47(1-3) (2000) 29-59
- [68] S. Safdar, A.J. Pinkerton, L. Li, M.A. Sheikh, P.J. Withers, An anisotropic enhanced thermal conductivity approach for modelling laser melt pools for Ni-base super alloys, *Applied Mathematical Modelling*, 37(3) (2013) 1187-1195.
- [69] S. Bag, A. Trivedi, A. De, Development of a finite element based heat transfer model for conduction mode laser spot welding process using an adaptive volumetric heat source, *International Journal of Thermal Sciences*, 48(10) (2009) 1923-1931.
- [70] B. Sawaf, M.N. Ozisik, Y. Jarny, An inverse analysis to estimate linearly temperature dependent thermal conductivity components and heat capacity of an orthotropic medium, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 38(16) (1995) 3005-3010.
- [71] C.-H. Huang, C.-Y. Huang, An inverse problem in estimating simultaneously the effective thermal conductivity and volumetric heat capacity of biological tissue, *Applied Mathematical Modelling*, 31(9) (2007) 1785-1797.
- [72] F. Bobaru, S. Rachakonda, Boundary layer in shape optimization of

- convective fins using a meshfree approach, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60(7) (2004) 1215-1236.
- [73] C.-H. Huang, J.-H. Hsiao, A non-linear fin design problem in determining the optimum shape of spine and longitudinal fins, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 19(2) (2002) 111-124.
- [74] D.T.W. Lin, C.-N. Huang, C.-C. Chang, The Optimization of the Heat Removal on the LED Package, *Advanced Science Letters*, 4(6-7) (2011) 2301-2305.
- [75] C.-Y. Yang, Estimation of boundary conditions in nonlinear inverse heat conduction problems, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 17(3) (2003) 389-395.
- [76] D.T.W. Lin, C.-y. Yang, The estimation of the strength of the heat source in the heat conduction problems, *Applied Mathematical Modelling*, 31(12) (2007) 2696-2710.
- [77] M. Frank, P. Wolfe, An algorithm for quadratic programming, *Naval research logistics quarterly*, 3(1-2) (1956) 95-110.
- [78] R. Sabarikanth, K. Sankaranarayanan, N. Siva Shanmugam, G. Buvanashakaran, A study of laser welding modes with varying beam energy levels, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 223(5) (2009) 1141-1156.
- [79] IMSL, *Library Edition 10.0, User's Manual: Math Library Version 1.0*, Houston, Tex, (1987).
- [80] S.-M. Lin, C.o.-K. Chen, Y.-T. Yang, A modified sequential approach for solving inverse heat conduction problems, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47(12-13) (2004) 2669-2680.
- [81] S.-M. Lin, A sequential algorithm and error sensitivity analysis for the inverse heat conduction problems with multiple heat sources, *Applied Mathematical Modelling*, 35(6) (2011) 2607-2617.
- [82] Alam et al. A comparative study of metaheuristic optimization approaches for directional overcurrent relays coordination. *Electric Power Systems Research*, Vol. 128, pp. 39-52, 2015. (<http://dx.doi.org/10.1016/j.epsr.2015.06.018>)
- [83] R. V. Rao. Jaya, A Simple and New Optimization Algorithm for Solving Constrained and Unconstrained Optimization Problems. *International Journal of Industrial Engineering Computations* 2016; 7 (1): 1934. (<http://dx.doi.org/10.5267/j.ijiec.2015.8.004>)
- [84] R. Storn and K. Price. Differential Evolution-A simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces, *Journal Global Optimization*, vol. 11, pp. 341-359, 1997
- [85] N.N Son, C.V. Kien and H.P.H Anh. A novel adaptive feed-forward-PID controller of a SCARA parallel robot using pneumatic artificial muscle actuator based on neural network and modified differential

- evolution algorithm. *Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 96, pp. 65-80, 2017
- [86] Son, N.N., Anh, H.P.H. and Chau, T.D. Adaptive neural model optimized by modified differential evolution for identifying 5-DOF robot manipulator dynamic system, *Soft Computing*, Vol. 22, N. 3, pp. 979-988, 2018
- [87] Ciarlet, P. G. “*The Finite Element Method for Elliptic Problems*”, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [88] Wait, R. and Mitchell A. R., “*The Finite Element Analysis and Applications*”. John Wiley and Sons, Chichester, 1985.
- [89] Rank, E., Rucker, M., Duster, A., Broker, H. “The efficiency of the p-version finite element method in a distributed computing environment” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, 52:589-604.
- [90] Cugnon, F. et Beckers, P. “*Developpement d’un prototype de code-p*”, rapport SF-232 Decembre 1996, LTAS-ULG.
- [91] Adjerid, S., “*A posteriori Finite Element error estimation for second-order hyperbolic problems*”, March 7, 2002.
- [92] Moore, P. K. “*Interpolation Error-Based A Posteriori Error Estimation for Two-Point Boundary Value Problem and Parabolic Equations in One Space Dimension*”. January 11, 2001.
- [93] Babuska I., Zienkiewicz O. C., Gago J. and Oliveira A. “*Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations*”. John Wiley and Sons, Chichester, 1986.
- [94] Cugnon, F. “*Automatisation des calculs elements finis dans le cadre de la methode-p*”, these de doctorat, 2000, ULG.
- [95] Winterscheidt, D. and Surana, K. S. “p-refinement least-squares finite element formulation of Burgers’ equation”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36: 3629-3646. 1993.
- [96] Mandel, J., “An Iterative Solver for p-Refinement Finite Elements in Three Dimensions,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 116, pp. 175-183, 199
- [97] Szabo, B.A., “The p - and h - p Versions of the Finite Element Method in Solid Mechanics,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 80, pp. 185-195, 1990.
- [98] Zienkiewicz, O.C. and Craig, A., “Adaptive Refinement, Error Estimates, Multigrid Solution, and Hierarchic Finite ElementMethod Concepts,” in *Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations*, Babuska, I., Zienkiewicz, O.C., Gago, J., and Oliveira, E.R.de.A. (eds.), John Wiley & Sons, Inc., 1986.
- [99] Szabo, B.A., “Implementation of a Finite Element Software System with h and p Extension Capabilities,” *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 2, pp. 177-194, 1986.
- [100] Szabo, B.A., “Mesh Design for the p-Refinement of the Finite

- ElementMethod,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 55, pp. 181-197, 1986
- [101] Campton, S.D. and Jarvis, J.L., “An Investigation of the Implementation of the p-Refinement Finite Element Method,” *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 23, pp. 1-21, 1996
- [102] Wiberg, N.-E., Moller, P., and Samuelsson A., “Use of Trigonometric Functions for Hierarchical Improvement of Finite Element Solutions of 2D-static Elastic Problems,” in *Proc. 93 NUMETA 85*, Vol. 1, Middleton, J. and Pande, G.N. (eds.), Rotterdam, Netherlands, pp. 77-86, 1985.
- [103] Peano, A., Pasini, A., Riccioni, R., and Sardella, L., “Adaptive Approximations in Finite Element Structural Analysis,” *Computers & Structures*, Vol. 10, pp. 333-342, 1979.
- [104] Wiberg, N.-E. and Moller, P., “Formulation and Solution of Hierarchical Finite Element Equations,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 26, pp. 1213- 1233, 1988
- [105] Mandel, J., “Two-level Domain Decomposition Preconditioning for the p-Refinement Finite Element Method in Three Dimensions,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 29, pp. 1095-1108, 1990
- [106] Dunavant, D. A., “High degree efficient symmetrical Gaussian quadrature rules for the triangle. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 21:1129-1148, 1985.
- [107] Duster, A., Rank, E., “The p-refinement of finite element method compared to an adaptive h-refinement for the deformation theory of plasticity” *Comput. Methods Appl. Mech. in Engineering*, 190 (2001), 1925-1935.
- [108] Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L., *The Finite Element Method*, Fourth Edition, Vol. 1 Basic Formulation and Linear Programs, McGraw-Hill Book Company Europe, 1994
- [109] Information on http://amet-me.mnsu.edu/UserFilesShared/DATA_ACQUISITION/mts/MaterialData/MaterialData_6809-1018ColdDrawn.pdf
- [110] Information on <http://www.yandreou.com/wp-content/uploads/2014/08/AISI-1018-Mild-Low-Carbon-Steel-PDF.pdf>
- [111] Information on <http://www.engr.mun.ca/~katna/5931/STRAIN%20ENERGY-ImpactLoading.pdf>
- [112] Information on http://homepages.engineering.auckland.ac.nz/~pkel015/SolidMechanicsBooks/Part_I/BookSM_Part_I/08_Energy/08_Energy_02_Elastic_Strain_Energy.pdf